Helmholtz方程式基本解應用

領域Ω內，函數ϕ滿足下列Helmholtz方程式

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \qquad (A)$$

k^2表示正值常數，其邊界條件為

$$\left.\begin{array}{ll} \Gamma_1\text{上}, & \phi = q \\ \Gamma_2\text{上}, & \bar{\phi} = \partial\phi/\partial n = \bar{q} \end{array}\right\} \qquad (B)$$

全邊界$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$，權函數為$\phi^*$時，對(A)式，作如邊界法同樣演算得

$$\int_\Omega (\nabla^2\phi + k^2\phi)\phi^* d\Omega = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*)d\Gamma + \int_\Omega \phi(\nabla^2\phi^* + k^2\phi^*)d\Omega = 0 \qquad (C)$$

ϕ^*為Helmholtz方程式基本解，滿足下列方程式

$$\nabla^2\phi^* + k^2\phi^* + \delta_1 = 0 \qquad (D)$$

2維問題(時間函數以exp（$-i\sigma t$）表示)

$$\phi^* = -\frac{1}{4}H_0^{(1)}(kr) \qquad (E)$$

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr)$$

r表示源點至特定點間距離，J_o為第1種Bessel函數，Y_o為第2種Bessel函數，$H_o^{(1)}$稱為0次第1種Hankel函數

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial r} = \frac{i}{4}H_1^{(1)}(kr)$$

$H_1^{(1)}$表示1次第1種Hankel函數。將(E)式代入(C)式得

$$\phi_i = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*)d\Gamma$$

點i在邊界上時，考慮其特異性得

$$\frac{1}{2}\phi_i = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*)d\Gamma$$

即對Helmholtz方程式的邊界元素法，與對Laplace方程式方法完全相同，僅基本解不同而已。

載滿珠寶的駱駝
2011 埃及尼羅河之旅
載滿貨品的騙子
阿拉丁神燈

回分類索引　回海洋工作站