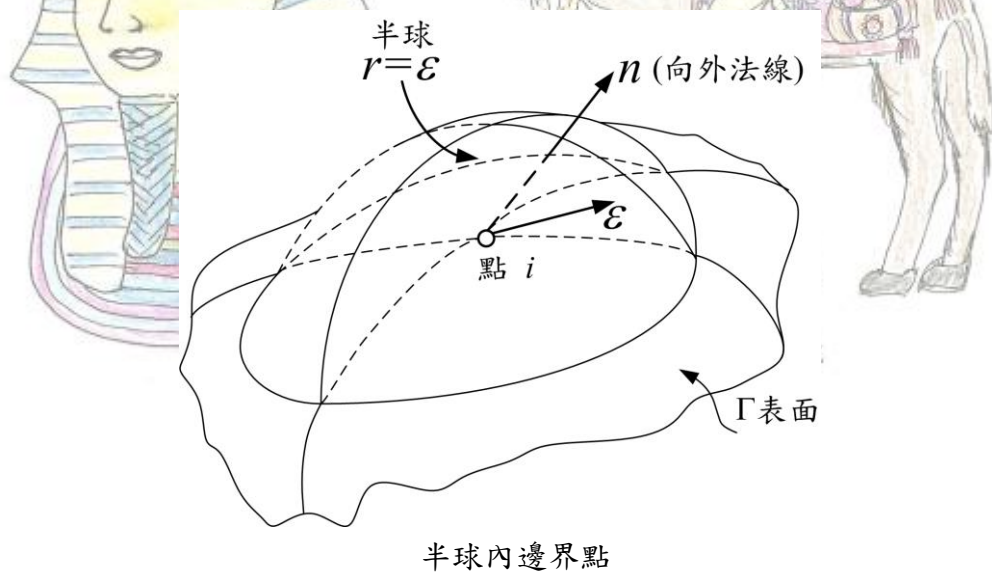


邊界積分方程式

已知封閉邊界上函數值及其法線方向導函數值時，領域內任意 1 點的函數值，可依下式求得

$$\phi_i = \int_{\Gamma} (\bar{\phi} \phi^* - \phi \bar{\phi}^*) d\Gamma \quad (A)$$

因此首先必須討論將點 i 取於邊界上時的狀況，下述係對圓滑邊界進行解析。



如上圖，考慮 2 維領域上某 1 點之半球，以該點為圓心，半徑為 ε ，當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時，該點即為邊界點。將上式右邊第 1 項的邊界 Γ ，分成下列 2 部份

$$\int_{\Gamma} \bar{\phi} \phi^* d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} \bar{\phi} \phi^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \bar{\phi} \phi^* d\Gamma$$

討論右邊第 2 項，將基本解代入 ϕ^* 可得

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} \bar{\phi} \phi^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \bar{\phi} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\Gamma$$

由於半球表面積為 $2\pi\varepsilon^2$ ，對上式取極值，即當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時，取 $\phi \rightarrow \phi_i$ ，得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \left(-\bar{\phi} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \right) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \bar{\phi}_i \right) = -\frac{1}{2} \bar{\phi}_i$$

由於 ε 變為 0，邊界 $\Gamma_{2-\varepsilon}$ 式可以 Γ_2 表示，即積分為包含特異點之積分。對 (A) 式右邊第 2 項作同樣計算，由於

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \bar{\phi} \phi^* d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \bar{\phi} \frac{1}{4\pi\varepsilon} d\Gamma = 0$$

即無特異性發生，將上項結果代入(A)式得

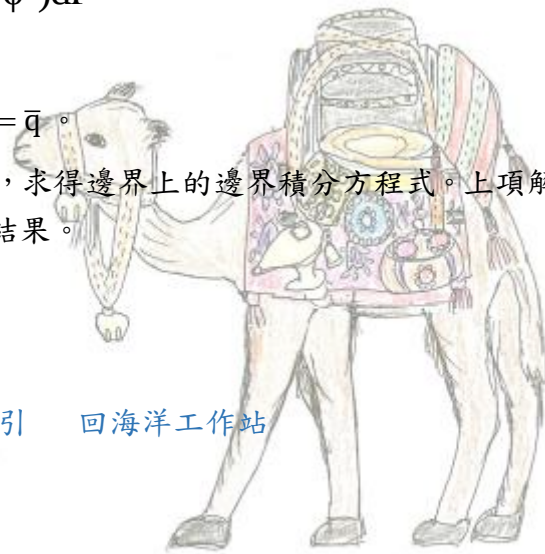
$$\frac{1}{2}\phi_i = \int_{\Gamma} (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*)d\Gamma$$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ，在 Γ_1 上 $\phi = q$ ， Γ_2 上 $\bar{\phi} = \bar{q}$ 。

上式表示因考量基本解特異性，求得邊界上的邊界積分方程式。上項解析對2維問題同樣可適用，亦可得同樣結果。



[回分類索引](#)



載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈