

Laplace方程式基本解應用

Laplace方程式基本解以 ϕ^* 表示， ϕ^* 應為下列方程式之解

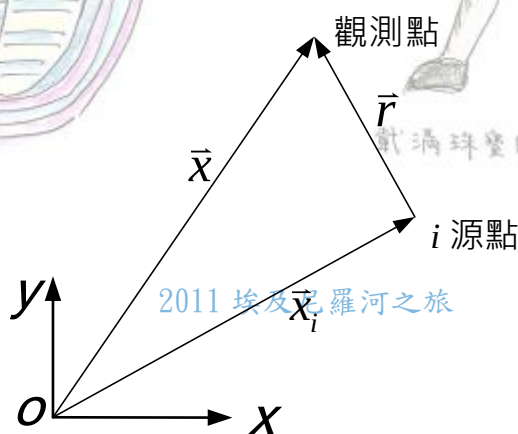
$$\nabla^2 \phi^* + \delta_i = 0$$

或

$$\nabla^2 \phi^* + \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = 0$$

如下圖所示，點 $\vec{x}_i$ 為源點，此點具有Delta函數特異性， $\vec{x}$ 為觀測點，則函數 ϕ^* 為源點與觀測點間距離的函數，其距離可以下式表示

$$r = |\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{x}_i|$$



基本解

對基本解加上其他任意函數 ϕ 之權，具有下列性質

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi^*) \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \delta_i \phi d\Omega = -\phi_i \quad (C)$$

ϕ_i 為受單位勢作用點之未知函數 ϕ 值。

對Laplace方程式，假定權函數 ϕ^* 由基本解所構成，上式可改寫成

$$\phi_i = \int_{\Gamma} (\bar{\phi} \phi^* - \phi \bar{\phi}^*) d\Gamma$$

上式表示封閉領域內任意1點i上 ϕ 值，與邊界面 Γ 上 $\bar{\phi}$ 及 ϕ 值有關。如邊界積分方程式所述方法，可得下列邊界積分方程式

$$\frac{1}{2} \phi_i = \int_{\Gamma} (\bar{\phi} \phi^* - \phi \bar{\phi}^*) d\Gamma$$

對3維均質介質，(A)式的基本解為

$$\phi^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (D)$$

欲證明上式為所求基本解，只須將(B)式以下式所示球座標系考量即可

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + \delta_i = 0 \quad (E)$$

對不為 0 的任意 r 值，將(D)式代入(E)式，即可發現 ϕ^* 滿足支配方程式，當 $r=0$ 時會產生特異性。為調查 $r \rightarrow 0$ 時的特性，考慮包圍勢作用點 i 小球，評估其積分，討論依 Gauss 定理所表示下列方程式

$$\int_{\Omega_e} \nabla^2 \phi^* d\Omega = \int_{\Gamma_e} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} d\Gamma \quad (F)$$

Ω_e 及 Γ_e 分別表示包圍源點的球體積及表面，將(C)式代入上式右邊得

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_e} \left(-\frac{1}{r^2} \right) d\Gamma_e = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi r^2}{r^2} \right)_{\Gamma_e} = -1 \quad (G)$$

表示當 $r \rightarrow 0$ 時，與距離無關，球的勢積分值會趨近於 1，亦即表示為單位源強度。

對均質 2 維介質，Laplace 方程式基本解為

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi} \ell_n \frac{1}{r} \quad 2011 \text{ 埃及尼羅河之旅}$$

[回分類索引](#)

[回海洋工作站](#)



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈