應用邊界元素法解析波引起的海濱流

2025/03/01

1. 2維Navier-Stokes方程式及連續方程式的矩陣形式表示

應用邊界元素法依2維Navier-Stokes方程式解析波引起的海濱流，運動方程式及連續方程式分別如下。

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -g\,\mathrm{Re}\frac{\partial H}{\partial x}+\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)-\frac{R_x}{H}-\frac{\tau_x}{H} \\ \mathrm{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -g\,\mathrm{Re}\frac{\partial H}{\partial y}+\left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right)-\frac{R_y}{H}-\frac{\tau_y}{H} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2}$$

$$H=\varsigma+h$$

Re為Reynolds數， Rx、Ry為下示因波存在引起的過剩動量束。u、v分別為x、y方向的流速分量。H為各點水面運動，h為該點靜水面深度，ζ為自由水面水深方向運動量。τx、τy分別為x、y方向的海底摩擦項。

$$R_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(|u_w|\,u_w-|w_w|\,w_w\right)+\frac{\partial(u_w v_w)}{\partial y}$$

$$R_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(|v_w|\,v_w-|w_w|\,w_w\right)+\frac{\partial(u_w v_w)}{\partial x}$$

$$\tau_x=\rho f_m u_b u \qquad \tau_v=\rho f_m u_b v$$

u_w、w_w分別為x、y方向的瞬間水粒子流速，ρ為流體密度、f_m為摩擦係數、u_b為海底面水粒子流速。將(1)式中的H項y分解如下，當底床為定床且海岸坡度小時，可忽略∂h/∂x、∂h/∂y項，此項係為將來考量動床而保留。

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -g\,\mathrm{Re}\frac{\partial \varsigma}{\partial x}+\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)-\frac{1}{H}R_x-\frac{\tau_x}{H}-g\,\mathrm{Re}\frac{\partial h}{\partial x} \\ \mathrm{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -g\,\mathrm{Re}\frac{\partial \varsigma}{\partial y}+\left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right)-\frac{1}{H}R_y-\frac{\tau_y}{H}-g\,\mathrm{Re}\frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

(3)

$$\sigma_{xx}=2\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \sigma_{yy}=2\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

將(3)式變形成如下

$$
-\operatorname{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left[\Delta u+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right]-g\operatorname{Re}\frac{\partial \varsigma}{\partial x}=\frac{1}{H}R_x+\frac{\tau_x}{H}+g\operatorname{Re}\frac{\partial h}{\partial x}
$$

$$
-\operatorname{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left[\Delta v+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right]-g\operatorname{Re}\frac{\partial \varsigma}{\partial y}=\frac{1}{H}R_y+\frac{\tau_y}{H}+g\operatorname{Re}\frac{\partial h}{\partial y}
$$

(4)

將(4)及(2)式以下列矩陣形式表示

$$
\begin{bmatrix}
-\operatorname{Re}D_t+\Delta+D_{11} & D_{12} & -g\operatorname{Re}D_1\\
D_{21} & -\operatorname{Re}D_t+\Delta+D_{22} & -g\operatorname{Re}D_2\\
D_1 & D_2 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u\\ v\\ \varsigma \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} F_x+\operatorname{Re}C_x\\ F_y+\operatorname{Re}C_y\\ 0 \end{bmatrix}
\quad (5)
$$

$$
F_x=\frac{1}{H}R_x+\frac{\tau_x}{H}+g\operatorname{Re}\frac{\partial h}{\partial x}\qquad F_y=\frac{1}{H}R_y+\frac{\tau_y}{H}+g\operatorname{Re}\frac{\partial h}{\partial y}
$$

$$
C_x=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\qquad C_y=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}
$$

$$
D_t=\frac{\partial}{\partial t}\qquad D_1=\frac{\partial}{\partial x}\qquad D_2=\frac{\partial}{\partial y}
$$

$$
D_{11}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\qquad D_{12}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\qquad D_{21}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\qquad D_{22}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}
$$

2. 應用時間差分數值計算

為數值計算(5)式，對時間採用如下式表示前進差分。

$$
\left[L_{\alpha\beta}\right]\left[X_\beta^{t+1}\right]=\left[K_\alpha^t\right]-\lambda\left[X_\alpha^t\right]
$$

$\left[L_{\alpha\beta}\right]\left[X_\beta^{t+1}\right]=\left[K_\alpha^t\right]-\lambda\left[X_\alpha^t\right]$

(6)

$$
\left[L_{\alpha\beta}\right]=
\begin{bmatrix}
-\operatorname{Re}D_t+\Delta+D_{11} & D_{12} & -g\operatorname{Re}D_1\\
D_{21} & -\operatorname{Re}D_t+\Delta+D_{22} & -g\operatorname{Re}D_2\\
D_1 & D_2 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\lambda=\frac{R_e}{\Delta t}
$$

$$
\left[X_\beta^{t+1}\right]=\left[u^{t+1}\quad v^{t+1}\quad \varsigma^{t+1}\right]^T
$$

$$
\left[X_\alpha^{t}\right]=\left[u^{t}\quad v^{t}\quad \varsigma^{t}\right]^T
$$

$$
\left[K_\alpha^{t}\right]=\left[K_1^{t}\quad K_2^{t}\quad 0\right]^T
$$

$$[K_1] = [F_x + R_e C_x] \qquad [K_2] = [F_y + R_e C_y] \qquad [K_3] = 0$$

3.積分方程式

將(6)式乘以權重函數 $W^*_{\alpha\lambda}$ 後，對空間作積分，得下列權殘表示。

$$\int_\Omega \left(L_{\alpha\beta} X_\beta^{\,t+1} - K_\alpha^{\,t} + \lambda X_\alpha^{\,t} \right) W^{\,*}_{\alpha\gamma} d\Omega = 0 \tag{7}$$

將上式對時間及空間，依 Guass 發散定理作 2 次部分積分，得下列「逆定式化」式(inverse formation)。

$$\int_\Omega X_\alpha^{\,t+1} L_{\alpha\beta} W^{\,*}_{\beta\gamma} d\Omega = \int_\Gamma \left(u_i^{\,t+1} \boldsymbol{\Sigma}^*_{i\gamma} - \sigma_i^{\,t+1} W^{\,*}_{i\gamma} \right) d\boldsymbol{\Gamma} + \int_\Omega K_\alpha^{\,t} W^{\,*}_{\alpha\gamma} d\Omega - \int_\Omega \lambda X_\alpha^{\,t} W^{\,*}_{\alpha\gamma} d\Omega \tag{8}$$

$\hat{L}_{\alpha\beta}$ 是如下所示 $L_{\alpha\beta}$ 的伴隨矩陣(參考 Tosaka(4.24)式)。

$$[L_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -\lambda + \Delta + D_{11} & D_{12} & -D_1 \\ D_{21} & -\lambda + \Delta + D_{22} & -D_2 \\ -g \,\mathrm{Re}\, D_1 & -g \,\mathrm{Re}\, D_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\Sigma}^*_{i\gamma}$ 是對應剪應力 σ_i，依基本解張量以下式表示

$$\boldsymbol{\Sigma}^*_{i\gamma} = \left(-W^{\,*}_{3\gamma} \delta_{ij} + W^{\,*}_{i\gamma,j} + W^{\,*}_{j\gamma,i} \right) n_j \tag{10}$$

權重函數 $W^*_{\beta\gamma}$ 作為微分演算子 $L_{\alpha\beta}$ 的伴隨矩陣 $L_{\alpha\beta}$ 的基本解張量，必要滿足下式

$$L_{\alpha\beta} W^{\,*}_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} \delta(x - y) \tag{11}$$

將上式式代入(8)式，得 $X_\gamma(y)$ 的積分方程式如下

$$\begin{aligned} X_\gamma^{\,t+1}(y) = {} & \int_\Gamma u_i^{\,t+1}(x) \boldsymbol{\Sigma}^*_{i\gamma}(x, y) d\boldsymbol{\Gamma} - \int_\Gamma \sigma_i^{\,t+1} W^{\,*}_{i\gamma}(x, y) d\boldsymbol{\Gamma} \\ & + \int_\Omega K_\alpha^{\,t} W^{\,*}_{\alpha\gamma}(x, y) d\Omega - \int_\Omega \lambda X_\alpha^{\,t}(x, y) W^{\,*}_{\alpha\gamma}(x, y) d\Omega \end{aligned} \tag{12}$$

γ=1,2 表示流速分量 u_1 及 u_2，γ=3 表示水位變動 ζ 的積分方程式。對流速分

量 u_1 及 u_2，是對源點 y 在邊界上時成立的積分方程式，考量基本解張量的空間函數特異性，可以下式表示

$$\frac{\theta(y)}{2\pi}X_\gamma^{\,t+1}(y) = \int_\Gamma u_i^{\,t+1}(x)\boldsymbol{\Sigma}^*_{i\gamma}(x,y)d\boldsymbol{\Gamma} - \int_\Gamma \sigma_i^{\,t+1}W^{\,*}_{\,i\gamma}(x,y)d\boldsymbol{\Gamma} + \int_\Omega K_\alpha^{\,t}W^{\,*}_{\,\alpha\gamma}(x,y)d\Omega - \int_\Omega \lambda X_\alpha^{\,t}(x,y)W^{\,*}_{\,\alpha\gamma}(x,y)d\Omega \tag{13}$$

對平滑邊界上式可簡化成

$$\frac{1}{2}X_\gamma^{\,t+1}(y) = \int_\Gamma u_i^{\,t+1}(x)\boldsymbol{\Sigma}^*_{i\gamma}(x,y)d\boldsymbol{\Gamma} - \int_\Gamma \sigma_i^{\,t+1}W^{\,*}_{\,i\gamma}(x,y)d\boldsymbol{\Gamma} + \int_\Omega K_\alpha^{\,t}W^{\,*}_{\,\alpha\gamma}(x,y)d\Omega - \int_\Omega \lambda X_\alpha^{\,t}(x,y)W^{\,*}_{\,\alpha\gamma}(x,y)d\Omega \tag{14}$$

4. 基本解張量 $W^{\,*}_{\,\alpha\beta}$ $W^*_{\alpha\beta}$

基本解張量 $W^{\,*}_{\,\alpha\beta}$ 可利用伴隨矩陣 $L_{\alpha\beta}$ 的餘因子矩陣 $M_{\,\alpha\beta}$ 加以計算，$W^{\,*}_{\,\alpha\beta}$ 可依無向量函數 ϕ*以下列「勢」形式表示

$$W^{\,*}_{\,\alpha\beta} = M_{\,\alpha\beta}\phi^* \tag{15}$$

依(9)式得

$$[M_{\,\alpha\beta}] = \mathrm{Re}[\widehat{M}_{\,\alpha\beta}] \tag{16}$$

$$[\widehat{M}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} & -\dfrac{1}{g\,\mathrm{Re}}D_1\left(-\lambda+\Delta\right) \\ -D_{21} & D_{11} & -\dfrac{1}{g\,\mathrm{Re}}D_2\left(-\lambda+\Delta\right) \\ -D_1\left(-\lambda+\Delta\right) & -D_2\left(-\lambda+\Delta\right) & \dfrac{1}{g\,\mathrm{Re}}\left(-\lambda+\Delta\right)(-\lambda+2\Delta) \end{bmatrix} \tag{17}$$

將(15)式代入(11)式，並考量與伴隨矩陣 $L_{\alpha\beta}$ 的行列式 L 間，有下列關係

$$L_{\alpha\beta}W^{\,*}_{\,\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}\delta(x-y) \tag{18}$$

因

$$L = \mathrm{Re}\left(-\lambda+\Delta\right)\Delta \tag{19}$$

得

$$L\phi^* = \mathrm{Re}\left(-\lambda + \Delta\right)\Delta\phi^* = \delta(x-y) \qquad (20)$$

得

$$\phi^*(x,y) = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2\pi}\ell n\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(i\sqrt{\lambda}\,r\right)\right] \qquad (21)$$

基本解張量各分量如下

$$W^*_{ij} = (\Delta\delta_{ij} - D_iD_j)\phi^* \qquad (i,j=1,2)$$

$$W^*_{i3} = \frac{1}{g\,\mathrm{Re}}D_i(-\lambda + \Delta)\phi^* \qquad (i=1,2)$$

$$W^*_{3j} = -D_i(-\lambda + \Delta)\phi^* \qquad (j=1,2)$$

$$W^*_{33} = \frac{1}{g\,\mathrm{Re}}(-\lambda + \Delta)(-\lambda + 2\Delta)\phi^*$$

5. 數值模擬程序

配合數值波-流-砂場模式，模式設置程序如下：

⑴ 建立邊界及內部領域網格節點及網格元素

應用 Delaunay 三角分割建置 3 維海域各邊界網格元素建立：

① 邊界節點

② 內部領域網格

本法採用四邊形元素，取得訊資包含：

ⅰ. 網格元素編號及座標

ⅱ. 各元素頂點(節點)編號及座標

ⅲ. 各元素相鄰元素數及編號

⑵ 積分方程式離散化

積分方程式(14)式是空間函數，離散化是，將邊界Γ以 N 個微小線分 S_j 加以離散，內部領域Ω則是以 M 個微小面分 A_j 加以離散，本篇配合波場採用線性元素。邊界Γ分成海上的假想邊界線 Γ_S 及陸地的港池邊界線 Γ_L 等 2 部分，各有 N_S 及 N_L 個線分($N=N_S+N_L$)。將積分方程式(14)式離散，以下列和分方程式表示。

$$\frac{1}{2}X_{\gamma}^{\ t+1}(y) = \sum_{j=1}^{N}\int_{Sj} u_{i}^{\ t+1}(x)\boldsymbol{\Sigma}_{i\gamma}^{*}(x,y)d\boldsymbol{\Gamma} - \sum_{j=1}^{N}\int_{Sj} \sigma_{i}^{\ t+1}W_{\ i\gamma}^{\ *}(x,y)d\boldsymbol{\Gamma} + \sum_{m=1}^{M}\int_{Am} K_{\alpha}^{\ t}W_{\ \alpha\gamma}^{\ *}(x,y)d\boldsymbol{\Omega} - \sum_{m=1}^{M}\int_{Am} \lambda X_{\alpha}^{\ t}(x,y)W_{\ \alpha\gamma}^{\ *}(x,y)d\boldsymbol{\Omega} \tag{22}$$