3 維 Stokes 流邊界積分方程式

2012.01.22

1 非壓縮粘性流的運動及連續方程式

對理想流場,由於速度勢存在,只要求解速度勢即可,但對粘性流則必須以連立方程式同時解速度及壓力,以非壓縮粘性流體的 Stokes 流為例,其運動方程式及連續方程式分別如下。

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\rho F_i \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \tag{2}$$

ρ 為流體密度(視為定數),p 為靜壓, μ 為粘性係數,F_i 為單位質量所受外力。

2011 埃及尼羅河之旅

若張量 T_{ij} 以下式定義

$$T_{ij}=-\delta_{ij}p+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) \tag{3}$$

則(1)式可改寫成

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}-\rho F_i=0 \tag{4}$$

δ_{ij} 為如下所示 Kronecker 的 δ 函數

$$\delta_{ij}=\begin{cases}=1 & i=j\\ =0 & i\neq j\end{cases} \tag{5}$$

2. Stokes 方程式的基本解

作為 Stokes 方程式的基本解, 在位置 r_1, 時間 t_1 有 k 方向的單位集中力作用時, 位置 r, 時間 t 的速度 $v^*_{ik}(r-r_1,t-t_1)$, 壓力 $p^*_k(r-r_1,t-t_1)$ 必須滿足下列方程

式。

$$\rho\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial t}-\frac{\partial T^*_{ijk}}{\partial x_j}=\delta_{ik}\delta\left(r-r_1,t-t_1\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial x_i}=0 \tag{7}$$

但T^*_{ijk}如下式所示

$$T^*_{ijk}=-\delta_{ij}p^*_k+\mu\left(\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial v^*_{jk}}{\partial x_j}\right) \tag{8}$$

3. 非定常 Stokes 方程式的邊界積分方程式

對(1)及(2)式以下列權殘式表示

$$\int_0^t\iint_V\left\{v^*_{ik}\left[\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}-\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\rho F_i\right]-\left(p^*_k\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)\right\}dV(r)dt_1=0 \tag{9}$$

$v^*_{ik}(r-r_1,t-t_1)$, $p^*_k(r-r_1,t-t_1)$滿足(7)式但不滿足(6)式。利用(7)式及發散定理進行部分積分可將(9)式變形成如下式

$$-\int_0^t\iint_V\left(-\rho\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial t_1}-\mu\frac{\partial^2 v^*_{ik}}{\partial x_j{}^2}+\frac{\partial p^*_k}{\partial x_i}\right)v_i dV(r)dt_1-\int_0^t\iint_\Gamma\left[-\delta_{ij}p^*_k+\mu\left(\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial v^*_{jk}}{\partial x_i}\right)\right]n_j v_i d\Gamma(r)dt_1$$

$$=-\int_0^t\iint_\Gamma v^*_{ik}\left[-\delta_{ij}p+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]n_j d\Gamma(r)dt_1+\iint_V\left[\rho v_i v^*_{ik}\right]_{t_1=0}^{t}dV(r)-\int_0^t\iint_V\rho v^*_{ik}F_i dV(r)dt_1 \tag{10}$$

為了使上式左邊第 1 項的體積積分消失, v^*_{ik}, p^*_k必須滿足下列方程式

$$-\rho\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial t_1}=-\frac{\partial p^*_k}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v^*_{ik}}{\partial x_j{}^2}-\delta_{ik}\delta(r-r_1)\delta(t-t_1) \tag{11}$$

利用(11)式, 可得(10)式如下。

$$v_k(r_1,t)=\int_0^t\int_\Gamma\left(v_iT^*_{ijk}-v^*_{ik}T_{ij}\right)n_j d\Gamma(r)dt_1+\int_V\left[\rho v_i v^*_{ik}\right]_{t_1=0}^{t} dV(r)-\int_0^t\int_V \rho v^*_{ik}F_i dV(r)dt_1 \tag{12}$$

上式即為非定常 Stokes 方程式的邊界積分方程式。其基本解為

$$v^*_{ik}=-\frac{1}{8\pi^{3/2}\rho}\left\{\left[\delta_{ik}-\frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{R^2}\right]u^*+\left[\delta_{ik}-\frac{3(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{R^2}\right]\left[\frac{2\mu\tau}{R^2}-\frac{R^4}{R^3}erf\left(\frac{R}{2\sqrt{\nu\tau}}\right)\right]\right\} \tag{13}$$

$$p^*_k=-\frac{x_k-y_k}{4\pi R^2}\delta(\tau) \tag{14}$$

但

$$u^*=\frac{1}{(\nu\tau)^{3/2}}erf\left[-\frac{R^2}{4\nu\tau}\right] \tag{15}$$

$$erf(x)=\int_0^x e^{-y^2}dy \tag{16}$$

而 $\tau=t-t_1$。

4. 定常 Stokes 方程式的邊界積分方程式

考量定常流, 將(4)式乘以 $v^*_{ik}(r-r_1)$, (6)式乘以 $v_i(r_1)$ 相減後對全體流場作對 r 作積分, 利用發散定理及(2)、(7)式的關係可得

$$v_k(r)=\int_\Gamma\left[-v^*_{ik}(r-r_1)T_{ij}(r)\right]n_j(r)d\Gamma(r)+\int_\Gamma\left[-v_i(r)T^*_{ijk}(r-r_1)\right]n_j(r)d\Gamma(r)-\int_v\rho v^*_{ik}(r-r_1)F_i(r)dV(r) \tag{17}$$

n_j 表示 Γ 面上的法線方向單位向量的 j 軸成分。

對上式, 通常以速度作為邊界條件, 因此對

$$f_i=n_jT_{ij}\qquad(i=1.2.3) \tag{18}$$

可取得 3 個積分方程式。$f_i(r_1)$ 為邊界面上含靜壓的流體應力, 已知時可由(17)

式求得$v_k(r)$。

同理亦可對 p 求得積分方程式。故基本解v^*_{ik}，p^*_k如下

$$v^*_{ik} = -\frac{1}{8\pi\mu R}\left[\delta_{ik} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{R^2}\right] \tag{19}$$

$$p^*_k = -\frac{x_k - y_k}{4\pi R^2} \tag{20}$$

但$R = r - r_1$，$\mathrm{R} = |R| = |r - r_1|$。

參考文獻

1. 田中正隆、松本敏郎、中村正行:境界要素法,培風館,1991。
2. 境界要素法研究会:境界要素法の理論と応用,コロナ社、1986。
3. 日本流体力学会:流体における波動,朝倉書店,1989。
4. 登坂宣好、中山司:境界要素法の基礎,日本技連,1987
5. 黒木健実、竹迫一雄、添田朋子、大崎真喜子:境界要素流れ解析,森北出版,1987。
6. 日本機械学会:流れの数値シミュレーション・コロナ社,1990。
7. 日本土木学会:海岸波動,1994。
8. 保原充、大宮司久明:数値流体力学,東京大学出版会,1994。
9. 本間仁、堀川清司:海岸環境工学,東京大学出版会,1985。

載滿貨品的駱駝

阿拉丁神燈