3 維勢流邊界積分方程式

2012.01.24

1. 勢流的連續方程式

非壓縮非粘性流體的勢流，由於速度勢存在，其連續方程式如下所示 Laplace 方程式。

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1}$$

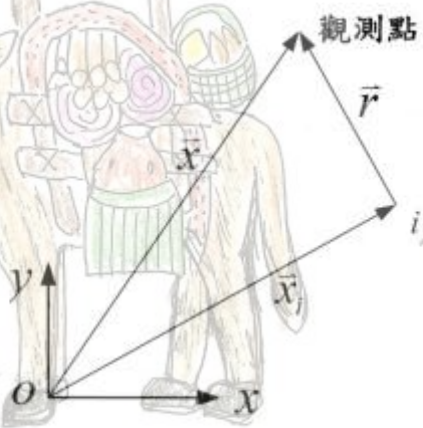
2 Laplace方程式的基本解

Laplace方程式的基本解若以ϕ^*表示，則ϕ^*應為下列方程式之解

$$\nabla^2\phi^* + \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = 0 \tag{2}$$

如圖下所示，點$\bar{x}_i$為源點（source point）在此點具有 Delta 函數之特異性，$\bar{x}$為觀測點（observation point），則函數ϕ^*只為源點與觀測點間距離之函數，其距離可以下式表示。

$$r = |\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{x}_i| \tag{3}$$



基本解

對基本解加上其他任意函數ϕ之權，具有下列之性質。

$$\int_\Omega (\nabla^2\phi^*)\phi d\Omega = -\int_\Omega \delta_i \phi d\Omega = -\phi_i \tag{4}$$

而ϕ_i為受單位勢作用之點上之未知函數ϕ之值。

對3維均質介質，(2)式之基本解為

$$\phi^* = \frac{1}{4\pi r} \qquad (5)$$

欲證明上式為所求之基本解，只須將(3)式以下式所示之球座標系考量即可。

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi^*}{\partial r} + \delta_i = 0 \qquad (6)$$

對不為 0 之任意 r 值，將(5)式代入(6)式，即可發現ϕ^*滿足支配方程式。(6)式中，當 r=0 時會產生特異性，為調查 $r\to 0$ 時之特性，考慮包圍勢作用之點 i 之小球而評估其積分，討論依 Gauss 定理所表示之下列方程式。

$$\int_{\Omega_e} \nabla^2 \phi^* d\Omega = \int_{\Gamma_e} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} d\Gamma \qquad (7)$$

而Ω_e及Γ_e分別表示包圍源點之球體積及表面，將(5)式代入(7)式之右邊得

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} d\Gamma = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_e}\left(-\frac{1}{r^2}\right) d\Gamma_e = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi r^2}{r^2}\right)_{\Gamma_e} = -1 \qquad (8)$$

即表示當$r\to 0$時，與距離無關，球上之勢積分值會趨近於1，亦即表示為單位之源強度。

3 Laplace 方程式的邊界積分方程式

對(1)式乘以權函數ϕ^*後，作 2 次部份積分得

$$\int_{\Gamma} (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*) d\Gamma + \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \phi^* d\Omega = 0 \qquad (9)$$

但$\bar{\phi} = \partial\phi/\partial n$，n 為邊界向外法線

因(7)及(8)式得

$$\phi_i = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*) d\Gamma \tag{10}$$

上式為 Laplace 方程式的邊界積分方程式，表示封閉領域內之任意一點 i 上之 ϕ 值與邊界面 Γ 上之 $\bar{\phi}$ 及 ϕ 值的關係式。

載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈