3 維 Newton 流邊界積分方程式
2012.01.25

1 非壓縮粘性流的運動及連續方程式

假設流體密度ρ一定，X_i軸方向的流速為V_i(i=1，2，3)，在流體Ω的內部無物質的生成或消失時，由質量守恆法則得下列連續方程式。

$$\frac{\partial V_i}{\partial X_i}=0 \tag{1}$$

由於假定流體為 Newton 流體，當流體的單位質量所受外力為F_i時，運動方程式可以下列 Navier-Stokes 方程式表示。

$$\frac{\partial V_i}{\partial T}+V_j\frac{\partial V_i}{\partial X_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial X_i}+\nu\nabla^2 V_i+F_i \tag{2}$$

T 表示時間，P 為壓力，$\nu=\mu/\rho$表示動粘性係數。將上兩式以代表長度 L 及速度 V，利用下列關係

座標: $x_i=X_i/L$

流速: $u_i=V_i/V$

時間: $t=TV/L$

壓力 $p=P/(\rho V^2)$

並令 Reynolds 數 Re=LV/ν，將其無因次化得

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+G_i \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

$$G_i = \left(L / V^2 \right) F_i \tag{6}$$

若邊界面Γ可分成 2 種邊界Γ_u及Γ_σ，其邊界條件分別如下

$$\Gamma_u\text{上:} \qquad u_i = \overline{u_i} \tag{7}$$

$$\Gamma_\sigma\text{上:} \qquad \sigma_i = \sigma_{ij} n_j = \overline{\sigma_i} \tag{8}$$

2. Navier-Stokes 方程式的 Stokes 近似基本解

將(4)式乘以權重函數u^*_i並對全部領域Ω及時間間隔$t_0 \leqq t < \tau$積分而得權殘差表示如下

$$\int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) u^*_i d\Omega = \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + G_i \right) u^*_i d\Omega \tag{9}$$

首先將上式中的非線項及外力項移至右邊得

$$\int_{\Omega} d\Omega \int_{t_0}^{\tau} \frac{\partial u_i}{\partial t} u^*_i dt - \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u^*_i d\Omega = \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Omega} \left(-u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + G_i \right) u^*_i d\Omega \tag{10}$$

將上式作部份積分並考量(3)式可得

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left[u^*_i u_i \right]_{t=t_0}^{\tau} d\Omega - \int_{\Omega} d\Omega \int_{t_0}^{\tau} u^*_i \frac{\partial u^*_i}{\partial t} dt - \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u^*_i d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u^*_i}{\partial x_i} d\Omega \\ &= --\int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Gamma} u_j n_j u_i u^*_i d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Omega} \left(u_j u_i \frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} + G_i u^*_i \right) d\Omega \end{aligned} \tag{11}$$

將(5)及(8)式代入上式作部份積分後，由於左邊第 3 及第 4 式可作下列變形。

$$-\int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Gamma} \sigma_{ij}n_j u^*_i d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} \sigma_{ij}\frac{\partial u^*_i}{\partial x_i} d\Omega$$

$$= -\int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Gamma} \sigma_i u^*_i d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} \left(-p\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial u^*_i}{\partial x_i} d\Omega$$

$$= -\int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Gamma} \sigma_i u^*_i d\Gamma - \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} p\delta_{ij}\frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(u_i n_j + u_j n_i\right)\frac{\partial u^*_i}{\partial x_i} d\Omega$$

$$-\int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(u_i\frac{\partial^2 u^*_i}{\partial x_j^{\,2}} + u_j\frac{\partial^2 u^*_j}{\partial x_j \partial x_i}\right) d\Omega$$

由(3)式的關係，可再將其變形成

$$-\int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Gamma} \sigma_{ij}n_j u^*_i d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} \sigma_{ij}\frac{\partial u^*_i}{\partial x_i} d\Omega$$

$$= -\int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Gamma} \sigma_i u^*_i d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} \left[-p u^*_i n_i + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(u_i n_j + u_j n_i\right)\right]\frac{\partial u^*_i}{\partial x_i} d\Omega$$

$$-\int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} p\delta_{ij}\frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{u_i}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*_i}{\partial x_j^{\,2}} + \frac{\partial^2 u^*_j}{\partial x_j \partial x_i}\right)\right] d\Omega$$

又因

$$\int_{\Gamma} p u_i n_i d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} u_i d\Omega \tag{12}$$

可將(11)式再變形成

$$\int_{\Omega} \left[u^*_i u_i\right]_{t=t_0}^{\tau} d\Omega - \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Gamma} \sigma_i u^*_i d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Gamma} \sigma^*_i u_i d\Gamma - \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} u_i\left[\frac{\partial u^*_i}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*_i}{\partial x_j^{\,2}} + \frac{\partial^2 u^*_j}{\partial x_j \partial x_i}\right)\right] d\Omega$$

$$= \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} p\frac{\partial u^*_i}{\partial x_i} d\Omega - \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Gamma} u_j n_j u_i u^*_i d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt\int_{\Omega} \left(u_j u_i\frac{\partial u^*_i}{\partial x_j} + G_i u^*_i\right) d\Omega \tag{13}$$

因

$$\sigma^*_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*_i}{\partial x_j^{\,2}} + \frac{\partial^2 u^*_j}{\partial x_i^{\,2}}\right) \tag{14}$$

補助表面力σ^*_i可由下式求得

$$\sigma^*_i = \sigma^*_{ij} n_j \tag{15}$$

權重函數u^*_i及 p 由分別依下式決定

$$u^*_i = u^*_{ik} e_k \tag{16}$$

$$p = p^*_k e_k \tag{17}$$

e_k為基向量。

u^*_{ik}及p^*_k為滿足下列連立方程式的基本解張量，即 Stokes 近似基本解。

$$\frac{\partial u^*_{ik}}{\partial t} - \frac{\partial p^*_k}{\partial x_j}\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u^*_{ik} = -\delta_{ij}\delta(x-\xi)(t-\tau) \tag{18}$$

$$\frac{\partial u^*_{ik}}{\partial x_i} = 0 \tag{19}$$

3. 非定常 Navier-Stokes 方程式的邊界積分方程式

將由解(18)及(19)式連立方程式得到的 Stokes 近似基本解u^*_{ik}及p^*_k代入(16)及(17)式後，再將其代入(13)式可得對任意作用點ξ、時刻τ的邊界積分方程式如下。

$$\begin{aligned} c_{ik}(\xi)u_i(\xi,\tau) + \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Gamma} \sigma^*_{ik} u_i \, d\Gamma &= \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Gamma} \sigma_i u^*_{ik} \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_{ik} u_i^0 \, d\Omega \\ &- \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Gamma} u_j n_j u_i u^*_{ik} \, d\Gamma + \int_{t_0}^{\tau} dt \int_{\Omega} \left(u_j u_i \frac{\partial u^*_{ik}}{\partial x_j} + G_i u^*_{ik} \right) d\Omega \end{aligned} \tag{20}$$

式中，u_i^0為起始流速，

$$\sigma^{*}{}_{ik} = \sigma^{*}{}_{ijk} n_j \tag{21}$$

$$\sigma^{*}{}_{ijk} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u^{*}{}_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial u^{*}{}_{jk}}{\partial x_i}\right) \tag{22}$$

4. 非定常 Navier-Stokes 方程式的時間差分邊界積分方程式

將(4)式的時間微分項以 1 階差分近似，時間增分為△t，

$$t_m = t_{m-1} + \Delta t \quad (m = 1, 2, 3, ...)$$

在時刻 $t=t_m$ 時，(4)式可變形成

$$\frac{u^{m}{}_{i} - u^{m-1}{}_{i}}{\Delta t} + u^{m}{}_{j}\frac{\partial u^{m}{}_{i}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma^{m}{}_{ij}}{\partial x_j} + G^{m}{}_{i} \tag{23}$$

對上式以權殘差方式表示如下。

$$\int_{\Omega}\left(\frac{u^{m}{}_{i} - u^{m-1}{}_{i}}{\Delta t} + u^{m}{}_{j}\frac{\partial u^{m}{}_{i}}{\partial x_j}\right)u^{*}{}_{i}d\Omega = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial \sigma^{m}{}_{ij}}{\partial x_j} + G^{m}{}_{i}\right)u^{*}{}_{i}d\Omega \tag{24}$$

經過演算得

$$\int_{\Gamma}\sigma^{m}{}_{i}u^{*}{}_{i}d\Gamma - \int_{\Gamma}\sigma^{*}{}_{i}u^{m}{}_{i}d\Gamma + \int_{\Omega}u^{m}{}_{i}\left[-\frac{\partial p^{m}}{\partial x_j}\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^{*}{}_{i}}{\partial x_j{}^2} + \frac{\partial^2 u^{*}{}_{j}}{\partial x_j \partial x_i}\right) - \gamma u^{*}{}_{i}\right]d\Omega$$
$$= -\int_{\Omega}p^{m}\frac{\partial u^{*}{}_{i}}{\partial x_i}d\Omega + \int_{\Gamma}u^{m}{}_{j}n_j u^{m}{}_{i}u^{*}{}_{i}d\Gamma - \int_{\Omega}\left[u^{m}{}_{j}u^{m}{}_{i}\frac{\partial u^{*}{}_{i}}{\partial x_j} + \left(G^{m}{}_{i} + \gamma\right)u^{*}{}_{i}\right]d\Omega \tag{25}$$

但 $\gamma = 1/\Delta t$ 。

基本解張量 $u^{*}{}_{ik}$ 及 $p^{*}{}_{k}$ 為滿足下列連立方程式的解

$$-\frac{\partial p^*{}_k}{\partial x_j}\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u^*{}_{ik}-\gamma u^*{}_{ik}=-\delta_{ik}\delta(x-\xi) \tag{26}$$

$$\frac{\partial u^*{}_{ik}}{\partial x_i}=0 \tag{27}$$

因

$u^*{}_i=u^*{}_{ik}e_k$ ， $p=p^*{}_k e_k$

將之代入(23)式得

$$c_{ik}(\xi)u^m{}_i(\xi)+\int_\Gamma \sigma^*{}_{ik}u^m{}_i d\Gamma=\int_\Gamma \sigma^m{}_i u^*{}_{ik}d\Gamma-\int_\Gamma u^m{}_j n_j u^m{}_i u^*{}_{ik}d\Gamma+\int_\Omega\left[u^m{}_j u^m{}_i\frac{\partial u^*{}_{ik}}{\partial x_j}+(G_i u^*{}_{ik}+\gamma)u^*{}_{ik}\right]d\Omega \tag{28}$$

上式為非定常 Navier-Stokes 方程式的時間差分邊界積分方程式。

5. 定常 Navier-Stokes 方程式的邊界積分方程式

以下列權殘差式表示定常 Navier-Stokes 方程式

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)u^*{}_i d\Omega=\int_\Omega\left(\frac{\partial \sigma_{*ij}}{\partial x_j}+G_i\right)u^*{}_i d\Omega \tag{27}$$

經過演算得

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma \sigma_i u^*{}_i d\Gamma+\int_\Gamma \sigma^*{}_i u_i d\Gamma-\int_\Omega u_i\left[-\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*{}_i}{\partial x_j{}^2}+\frac{\partial^2 u^*{}_j}{\partial x_j \partial x_i}\right)\right]d\Omega\\&=\int_\Omega p\frac{\partial u^*{}_i}{\partial x_i}d\Omega-\int_\Gamma u_j n_j u_i u^*{}_i d\Gamma+\int_\Omega\left(u_j u_i\frac{\partial u^*{}_i}{\partial x_j}+G_i u^*{}_i\right)d\Omega\end{aligned} \tag{28}$$

基本解張量 $u^*{}_{ik}$ 及 $p^*{}_k$ 為滿足下列連立方程式的解

$$-\frac{\partial p^*{}_k}{\partial x_j}\delta_{ij}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u^*{}_{ik}=-\delta_{ik}\delta(x-\xi) \tag{29}$$

$$\frac{\partial u^*_{ik}}{\partial x_i} = 0 \tag{30}$$

因

$$u^*_i = u^*_{ik} e_k \text{ , } p = p^*_k e_k$$

將之代入(28)式得

$$c_{ik}(\xi) u_i + \int_\Gamma \sigma^*_{ik} u_i d\Gamma = \int_\Gamma \sigma_i u^*_{ik} d\Gamma - \int_\Gamma u_j n_j u_i u^*_{ik} d\Gamma + \int_\Omega \left[u_j u_i \frac{\partial u^*_{ik}}{\partial x_j} + G_i u^*_{ik} u^*_{ik} \right] d\Omega \tag{31}$$

上式為定常 Navier-Stokes 方程式的邊界積分方程式。

參考文獻

1. 田中正隆、松本敏郎、中村正行:境界要素法，培風館，1991。
2. 境界要素法研究会:境界要素法の理論と応用，コロナ社、1986。
3. 日本流体力学会:流体における波動，朝倉書店，1989。
4. 登坂宣好、中山司:境界要素法の基礎，日本技連，1987
5. 黒木健実、竹迫一雄、添田朋子、大崎真喜子:境界要素流れ解析，森北出版，1987。
6. 日本機械学会:流れの数値シミュレーション・コロナ社，1990。
7. 日本土木学会:海岸波動，1994。
8. 保原充、大宮司久明:数值流体力学，東京大学出版会，1994。
9. 本間仁、堀川清司:海岸環境工学，東京大学出版会，1985。