

3 維熱移流邊界積分方程式

2012. 02. 03

1 非定常熱移流方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial X_j} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial X_j^2} \quad (1)$$

但 T =溫度， k =熱傳導率， c =比熱， v_i 為流速分量，利用 L =代表長， U =基準流速，

利用

$$P_e = LU / (k / \rho c) \quad , \quad u_j = v_j / U$$

$$x_j = X_j / L \quad , \quad \tau = t \frac{U}{L}$$

$$\theta = (T - T_{\min}) / (T_{\max} - T_{\min})$$

2011 埃及尼羅河之旅

將上無成因次化得

$$P_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} = 0 \quad (2)$$

2. 非定常熱移流方程式含時間項基本解的的邊界積分方程式

將(2)式乘以權重函數 w 並對全部領域 Ω 及時間間隔 $\tau_1 \leq t < \tau_2$ 積分而得

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[P_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau = 0 \quad (3)$$

對上式中的時間微分項及擴散項作部份積分得

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[P_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w P_e \theta)}{\partial \tau} - \frac{\partial (w P_e)}{\partial \tau} \theta \right] d\Omega d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega d\tau \quad (4)$$

$$- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(w \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \theta \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \theta \right] d\Omega d\tau = 0$$

因

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[P_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau \\ &= \int_{\Omega} \left[w P_e \theta \right]_{\tau_1}^{\tau_2} d\Omega + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega d\tau \\ & - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Gamma} \left(w \frac{\partial \theta}{\partial n} - \frac{\partial w}{\partial n} \theta \right) d\Gamma d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w P_e)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right] \theta d\Omega d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

當加權函數 w 採用下式所示函數時

2011 埃及尼羅河之旅

$$w = \frac{P_e}{4\pi(\tau_2 - \tau)^{3/2}} \exp \left[-\frac{P_e r^2}{4(\tau_2 - \tau)} \right] \quad (6)$$

代入上式可得

$$\begin{aligned} & c\theta(0, \tau_2) P_e + \int_{\Gamma} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta \frac{\partial w}{\partial n} d\tau d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial \theta}{\partial n} d\tau d\Gamma - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} w d\tau d\Omega + \int_{\Omega} (w P_e \theta)_{\tau=\tau_1} d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

上式為非定常熱移流方程式含時間項基本解的的邊界積分方程式。

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

3. 非定常熱移流方程式的時間差分邊界積分方程式

將(2)式的時間微分項以 1 階差分近似，時間增分為 $\Delta \tau$ ，

$$\tau_m = \tau_{m-1} + \Delta \tau \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

在時刻 $\tau = \tau_m$ 時，(2)式可變形成

$$P_e \left(\frac{\theta^m - \theta^{m-1}}{\Delta \tau} + u_j^m \frac{\partial \theta^m}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \theta^m}{\partial x_j^2} \quad (8)$$

將上式改寫成

$$\theta^m - \lambda \frac{\partial^2 \theta^m}{\partial x_j^2} - S^m = 0 \quad (9)$$

但

$$S^m = \theta^{m-1} - \Delta \tau u_j^m \frac{\partial \theta^{m-1}}{\partial x_j}$$

$$\lambda = \frac{\Delta \tau}{P_e}$$

若(9)式的基本解以下式表示 2011 埃及尼羅河之旅

$$w = \frac{1}{4\pi\lambda r} \exp(R) \quad (10)$$

$$R = \frac{r}{\sqrt{\lambda}}$$

得下列非定常熱移流方程式的時間差分邊界積分方程式。

$$c\theta^m(P) + \int \lambda \theta^m \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int \lambda w \frac{\partial \theta^m}{\partial n} d\Gamma + \int S^m w d\Omega \quad (11)$$

參考文獻

1. 田中正隆、松本敏郎、中村正行:境界要素法,培風館,1991。
2. 境界要素法研究会:境界要素法の理論と応用,コロナ社、1986。
3. 日本流体力学会:流体における波動,朝倉書店,1989。
4. 登坂宣好、中山司:境界要素法の基礎,日本技連,1987
5. 黒木健実、竹迫一雄、添田朋子、大崎真喜子:境界要素流れ解析,森北出版,1987。

6. 日本機械学会:流れの数値シミュレーション・コロナ社，1990。
7. 日本土木学会:海岸波動，1994。
8. 保原充、大宮司久明:数値流体力学，東京大学出版会，1994。
9. 本間仁、堀川清司:海岸環境工学，東京大学出版会，1985。



戴滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈