

3 維移流擴散邊界積分方程式

2012. 02. 02

1 非定常移流擴散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_j \frac{\partial C}{\partial X_j} = k \frac{\partial^2 C}{\partial X_j^2} \quad (1)$$

但 C =濃度, k =擴散係數, v_i 為流速分量, 利用 L =代表長, U =基準流速, 依

$$P_e = LU / k, \quad u_j = v_j / U$$

$$x_j = X_j / L, \quad \tau = t \frac{U}{L}$$

$$\theta = (C - C_{\min}) / (C_{\max} - C_{\min})$$

戴滿珠寶的駱駝

將(1)式無成因次化得

$$P_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} = 0 \quad (2)$$

2011 埃及尼羅河之旅

2. 非定常移流擴散方程式含時間項基本解的的邊界積分方程式

將(2)式乘以權重函數 w 並對全部領域 Ω 及時間間隔 $\tau_1 \leq t < \tau_2$ 積分而得

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[P_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau = 0 \quad (3)$$

對上式中的時間微分項及擴散項作部份積分得

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[P_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau = \text{阿拉丁神燈} \\ & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w P_e \theta)}{\partial \tau} - \frac{\partial (w P_e)}{\partial \tau} \theta \right] d\Omega d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega d\tau \\ & - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(w \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \theta \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \theta \right] d\Omega d\tau = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

因

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[P_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau \\ &= \int_{\Omega} [w P_e \theta]_{\tau_1}^{\tau_2} d\Omega + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega d\tau \\ & - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Gamma} \left(w \frac{\partial \theta}{\partial n} - \frac{\partial w}{\partial n} \theta \right) d\Gamma d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w P_e)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right] \theta d\Omega d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

當加權函數 w 採用下式所示函數時

$$w = \frac{P_e}{4\pi(\tau_2 - \tau)^{3/2}} \exp \left[-\frac{P_e r^2}{4(\tau_2 - \tau)} \right] \quad (6)$$

代入上式可得

$$c\theta(0, \tau_2)P_e + \int_{\Gamma} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta \frac{\partial w}{\partial n} d\tau d\Gamma = \quad (7)$$

$$\int_{\Gamma} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial \theta}{\partial n} d\tau d\Gamma - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} w d\tau d\Omega + \int_{\Omega} (w P_e \theta)_{\tau=\tau_1} d\Omega$$

上式為非定常移流擴散方程式含時間項基本解的的邊界積分方程式。

3. 非定常移流擴散方程式的時間差分邊界積分方程式

將(2)式的時間微分項以 1 階差分近似, 時間增分為 $\Delta \tau$,

$$\tau_m = \tau_{m-1} + \Delta \tau \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

在時刻 $\tau = \tau_m$ 時, (2) 式可變形為

$$P_e \left(\frac{\theta^m - \theta^{m-1}}{\Delta \tau} + u_j^m \frac{\partial \theta^m}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \theta^m}{\partial x_j^2} \quad (8)$$

將上式改寫成

$$\theta^m - \lambda \frac{\partial^2 \theta^m}{\partial x_j^2} - S^m = 0 \quad (9)$$

但

$$S^m = \theta^{m-1} - \Delta \tau u_j^m \frac{\partial \theta^{m-1}}{\partial x_j}$$

$$\lambda = \frac{\Delta \tau}{P_e}$$

若(9)式的基本解以下式表示

$$w = \frac{1}{4\pi\lambda r} \exp(R)$$

$$R = \frac{r}{\sqrt{\lambda}}$$



載滿珠寶的駱駝

(10)

2011 埃及尼羅河之旅

得下列非定常移流擴散方程式的時間差分邊界積分方程式。

$$c\theta^m(P) + \int \lambda \theta^m \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int \lambda w \frac{\partial \theta^m}{\partial n} d\Gamma + \int S^m w d\Omega \quad (11)$$

參考文獻

1. 田中正隆、松本敏郎、中村正行:境界要素法,培風館,1991。
2. 境界要素法研究会:境界要素法の理論と応用,コロナ社,1986。
3. 日本流体力学会:流体における波動,朝倉書店,1989。
4. 登坂宣好、中山司:境界要素法の基礎,日本技連,1987。
5. 黒木健実、竹迫一雄、添田朋子、大崎真喜子:境界要素流れ解析,森北出版,1987。
6. 日本機械学会:流れの数値シミュレーション・コロナ社,1990。
7. 日本土木学会:海岸波動,1994。
8. 保原充、大宮司久明:数値流体力学,東京大学出版会,1994。
9. 本間仁、堀川清司:海岸環境工学,東京大学出版会,1985。