

グリーンの公式による有限水深の波の2次元境界値問題の解法

(I. 透過および不透過斜面の場合)

井島 武士*・周 宗仁**・吉田 明德**

A Method of Analysis for Two-Dimensional Wave Problems by Means of Green's Identity Formula

(I. Permeable and Impermeable Slopes)

Takeshi IJIMA, C. R. CHOU and
Akinori YOSHIDA

1. 概 要

不規則な海底形状や斜面あるいは没水、半没水の状態の種々の形の物体に対して入射する波の変形とその作用あるいは不規則な形の物体運動等に関する問題には、従来の解析法では解決困難または頗る煩雑な問題が多い。著者等は2次元問題におけるポテンシャル函数に対するグリーンの公式を用いることにより、微小振幅波に関する限り、之等の問題の多くを極めて簡潔な数値解析により解決する方法を見出したので、その適用例として従来理論的解析の困難であつた透過および不透過な斜面に関する解をここに示すものである。

2. グリーンの公式

$x-z$ 平面の閉曲線 D により囲まれる閉領域内の点 (x, z) で、連続な2次の導函数をもち、且ラプラスの方程式を満足する函数 $\phi(x, z)$ は、境界線 D 上の点 (ξ, η) と領域内の点 (x, z) との距離を r とすれば、境界上の函数値 $\phi(\xi, \eta)$ と、境界線における外向き法線 ν に関する導函数 $\partial\phi(\xi, \eta)/\partial\nu$ により次式で与えられる¹⁾。

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_D \left[\phi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial(\nu/h_0)} \log(r/h_0) - \frac{\partial\phi(\xi, \eta)}{\partial(\nu/h_0)} \cdot \log(r/h_0) \right] \cdot ds/h_0 \quad (2.1)$$

ここで h_0 (一定) は閉領域の大きさに関する代表的長さ (例えば水深) で、積分は反時計回りの線積分である。

点 (x, z) が境界線 D 上の点 (ξ', η') と一致するときは、上式から次式を得る。

$$\phi(\xi', \eta') = \frac{1}{\pi} \int_D \left[\phi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial(\nu/h_0)} \log(R/h_0) - \frac{\partial\phi(\xi, \eta)}{\partial(\nu/h_0)} \cdot \log(R/h_0) \right] \cdot ds/h_0 \quad (2.2)$$

ここで R は点 (ξ, η) と (ξ', η') との距離である。境界線 D を N ケの点により N ケの微小要素に分割し、各要素の中央点を (ξ_j, η_j) , ($j=1 \sim N$)、長さを ds_j とすると、式 (2.2) は次の差分方程式に書き直される。

$$\phi(I) = \sum_{j=1}^N \left(\bar{E}_{ij} \phi(j) - E_{ij} \bar{\phi}(j) \right) \quad (2.3)$$

上式で $\bar{\phi}(j) = \partial\phi(j)/\partial(\nu/h_0)$ 、また \bar{E}_{ij} , E_{ij} は夫々次式で表わされる各要素上の積分値である。

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= \int_{ds_j} \frac{1}{\pi} \log(R_{ij}/h_0) \cdot ds/h_0 \\ \bar{E}_{ij} &= \int_{ds_j} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial(\nu/h_0)} \log(R_{ij}/h_0) \cdot ds/h_0 \\ R_{ij} &= \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

式 (2.3) は境界線 D 上の N ケの点の各々において成立する $\phi(j)$ と $\bar{\phi}(j)$ に関する N ケの一次方程式を表わしている。従つて式 (2.3) とは独立に、各々の点において $\phi(j)$ と $\bar{\phi}(j)$ の間に別の一次の関係式が

与えられるならば、それらを式(2.3)と共に連立方程式として解くことにより $\phi(f)$ 及び $\bar{\phi}(f)$ を定めることが出来ることになる。すると考える閉領域内の任意点 (x, z) におけるポテンシャル函数は式(2.1)により次のように計算されることになる。

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\bar{E}_{xj} \phi(f) - E_{1j} \bar{\phi}(f) \right) \quad (2.5)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} E_{xj} &= \int_{ds_j} \frac{1}{\pi} \log(r_{xj}/h_0) \cdot ds/h_0 \\ \bar{E}_{xj} &= \int_{ds_j} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial(\nu/h_0)} \cdot \log(r_{xj}/h_0) \cdot ds/h_0 \\ r_{xj} &= \sqrt{(\xi_j - x)^2 + (\eta_j - z)^2} \end{aligned} \right\} (2.6)$$

3. 有限水深域の波における境界条件

式(2.3)と独立な、 $\phi(f)$ と $\bar{\phi}(f)$ の関係は、与えられた境界値問題における力学的及び運動学的境界条件により表わされる。

座標原点 O を静水面に、 x 軸を水平に、 z 軸を鉛直上方に取り、入射波の振幅を ζ_0 、周波数を $\sigma (= 2\pi/T, T$ は周期) とする。

(i) 非圧縮性完全流体の波

時間を t 、重力の加速度を g で表わし、流体運動の速度ポテンシャルを $\Phi(x, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi(x, z) \cdot e^{i\sigma t}$ とすると、ポテンシャル函数 $\phi(x, z)$ は次のラプラスの方程式を満足する。

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0 \quad (3.1)$$

水平および鉛直流速 u, w ；流体圧力 p および水面波形 ζ は、流体密度を ρ として夫々次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{p}{\rho g \zeta_0} &= -i\phi(x, z) \cdot e^{i\sigma t} \\ \frac{\zeta}{\zeta_0} &= -i\phi(x, 0) \cdot e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} (3.2)$$

そして境界条件は例えば次のように与えられる。

(a) 自由表面条件

水面における圧力一定の条件により、自由表面条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \cdot \phi$$

故に

$$\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial(\nu/h_0)} = \frac{\sigma^2 h_0}{g} \cdot \phi \quad (z=0) \quad (3.3)$$

(b) 不透過面における条件

法線方向の流速が0であるべきことから

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{故に} \quad \bar{\phi} = 0 \quad (3.4)$$

(ii) 透過性物質内の流体運動と境界条件

空隙率 V の一様透過性の物質内で、運動に対する抵抗が流速に比例するような流体運動を考える。この運動は速度ポテンシャルをもち、抵抗の係数を μ 、速度ポテンシャルを $\phi_*(x, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi_*(x, z) \cdot e^{i\sigma t}$ とすると、水平および鉛直流速 u_*, w_* 、流体圧力 p_* 、水面波形 ζ_* は流体密度を ρ として夫々次式で与えられる²⁾。

$$\left. \begin{aligned} u_* &= \frac{\partial \Phi_*}{\partial x}, \quad w_* = \frac{\partial \Phi_*}{\partial z} \\ \frac{p_*}{\rho g \zeta_0} &= -i\beta \phi_*(x, z) \cdot e^{i\sigma t} \\ \frac{\zeta_*}{\zeta_0} &= -i\beta \phi_*(x, 0) e^{i\sigma t} \\ \beta &= \frac{\alpha}{V}, \quad \alpha = 1 - i\mu/\sigma \end{aligned} \right\} (3.5)$$

(a) 自由表面条件

式(3.3)に対応して次のように与えられる。

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial z} = \alpha \cdot \frac{\sigma^2}{g} \phi_*$$

故に

$$\bar{\phi}_* = \alpha \cdot \frac{\sigma^2 h_0}{g} \cdot \phi_* \quad (z=0) \quad (3.6)$$

(b) 不透過面における条件

式(3.4)と同じく

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial \nu} = 0 \quad \text{故に} \quad \bar{\phi}_* = 0 \quad (3.7)$$

(i) の場合に境界面が与えられた運動を行う場合、或は (ii) の場合に、透過性物質が与えられた並進運動(回転運動を含まない)を行う場合にも類似の境界条件が容易に定められる。

4. 透過性斜面による波の変形

Fig. 1 に示すように、不透過な海底面 DCB 上に AB のように透過性物質による斜面があり、右方から

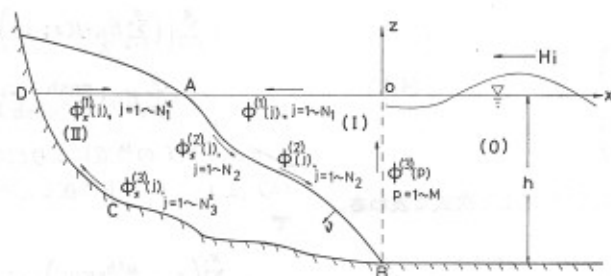


Fig. 1 Definition Sketch

$\zeta_1 = \zeta_0 \cos(kx + \sigma t) = \zeta_0 e^{i(kx + \sigma t)}$ で表わされる振幅 ζ_0 , 周波数 σ の波が入射する場合を考える。この問題は、捨石による傾斜海岸護岸の問題であるが、理論解析によつて取扱われた例は少く、僅かに McCorquodale (1972)³⁾ が、最近流行の有限要素法による数値解析を試みたが、未だ一般の結果を得るに到らず、また Sollitt (1972)⁴⁾ が大雑把な近似推定を行つてゐるにすぎない。もともと斜面における波の変形の問題は多くの理論解析が行われたが⁵⁾、一様勾配の不透過斜面の場合でも極めて複雑な理論構成が必要であり、複雑な形の透過斜面については数値解析による外はないが、上述のように例えば有限要素法などによつても、頗る解決困難な問題とされる。

然し本論文の方法では、以下に述べるように極めて簡明に解決されるのである。

先ず Fig. 1 のように、斜面の法先点 B より右側では水深は一定で h とし、原点 O を点 B の直上に取り、

流体域を仮想面 OB により、右側の領域 (O) と、OABO で囲まれる領域 (I) および ABCDA で囲まれる領域 (II) に区分し、領域 (I) および (II) に対して式 (2.3) を適用する。

(i) 領域 (O) におけるポテンシャル函数

一定水深 h の海域では、流体運動のポテンシャル函数 $\phi_0(x, z)$ の一般形は、反射波を表わす常数 A_0 、定常波を表わす常数 A_n および入射波の項により次式で与えられる。

$$\phi_0(x, z) = (e^{ikx} + A_0 e^{-ikx}) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-knx} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad (4.1)$$

ここで k および $k_n (n=1, 2, 3, \dots)$ は次式の根である。

$$kh \tanh kh = -k_n h \tan k_n h = \frac{\sigma^2 h}{g} \quad (4.2)$$

式 (4.1) により仮想面 OB では

$$\phi_0(0, z) = (1 + A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad (4.3)$$

$$\bar{\phi}_0(0, z) = \frac{\partial \phi_0(0, z)}{\partial (x/h_0)} = \left[ikh(1 - A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot k_n h \cdot \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] \cdot \frac{h_0}{h} \quad (4.4)$$

(ii) 領域 (I) における境界面上のポテンシャル函数

境界 OA, AB および BO 上のポテンシャル函数を夫々 $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ および $\phi^{(3)}$ とし、各境界線を夫々 N_1 , N_2 および M ケの点で分割し、各点でのポテンシャル函数を $\phi^{(1)}(j)$, ($j=1 \sim N_1$); $\phi^{(2)}(j)$, ($j=1 \sim N_2$); $\phi^{(3)}(p)$, ($p=1 \sim M$) で表わす。

$\phi^{(2)}$ および $\bar{\phi}^{(3)}$ に対しては、仮想面 OB に沿う領域 (O) との水平流速と圧力の連続条件により式 (4.3) (4.4) から次の関係式が存在する。

$$\frac{h_0}{h} \cdot \left[ikh(1 - A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n h \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \right] = \bar{\phi}^{(3)}(z) \quad (4.5)$$

$$(1 + A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} = \phi^{(3)}(z) \quad (4.6)$$

式 (4.5) の各項に $\cosh k(z+h)$, $\cos k_n(z+h)$ を乗じ、 z につき $-h$ から 0 までの積分を行ない、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= kh, \quad \lambda_n = k_n h, \\ N_0 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_0}{\sinh 2\lambda_0} \right) \\ N_n &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n} \right) \end{aligned} \right\} (4.7)$$

とおくと、 A_0 および A_n は $\bar{\phi}^{(3)}$ により次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 + \frac{i}{N_0 \sinh \lambda_0} \sum_{p=1}^M \bar{\phi}^{(3)}(p) \cdot \cosh k(z_p + h) \cdot (\Delta z_p / h_0) \\ A_n &= -\frac{1}{N_n \sin \lambda_n} \sum_{p=1}^M \bar{\phi}^{(3)}(p) \cdot \cos k_n(z_p + h) \cdot (\Delta z_p / h_0) \\ \Delta z_p &= \frac{1}{2}(z_{p+1} - z_{p-1}) \end{aligned} \right\} (4.8)$$

ここで z_p は点 p における z を表わす。
式 (4.8) を (4.6) に代入して、 $\phi^{(3)}$ は $\bar{\phi}^{(3)}$ (p) により次式で表わされることになる。

$$\phi^{(3)}(p) = 2 \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh \lambda_0} + \sum_{s=1}^M f(s; p) \cdot \bar{\phi}^{(3)}(s) \cdot (\Delta z_s / h_0) \quad (4.9)$$

但し

$$f(s; p) = i \frac{\cosh k(z_s + h) \cosh k(z_p + h)}{N_0 \sinh \lambda_0 \cosh \lambda_0} - \sum_{n=1}^M \frac{\cos k_n(z_s + h) \cos k_n(z_p + h)}{N_n \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \quad (4.10)$$

そこで領域 (I) に対して式 (2.3) を適用すると、境界面 OABO 上の任意点 i に対して次式を得る。

$$\begin{aligned} -\phi(i) + \sum_{j=1}^{N_1} \left(\bar{E}_{ij}^{(1)} \phi^{(1)}(j) - E_{ij}^{(1)} \bar{\phi}^{(1)}(j) \right) \\ + \sum_{j=1}^{N_2} \left(\bar{E}_{ij}^{(2)} \phi^{(2)}(j) - E_{ij}^{(2)} \bar{\phi}^{(2)}(j) \right) \\ + \sum_{p=1}^M \left(\bar{E}_{ip} \phi^{(3)}(p) - E_{ip} \bar{\phi}^{(3)}(p) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

上式の左辺第 2 項に式 (3.3)、第 4 項に式 (4.9) の関係を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} -\phi(i) + \sum_{j=1}^{N_1} \left(\bar{E}_{ij}^{(1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1)} \right) \phi^{(1)}(j) \\ + \sum_{j=1}^{N_2} \left(\bar{E}_{ij}^{(2)} \phi^{(2)}(j) - E_{ij}^{(2)} \bar{\phi}^{(2)}(j) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \sum_{p=1}^M \left\{ \left(\sum_{s=1}^M \bar{E}_{is} \cdot f(s; p) \right) \cdot \frac{\Delta z_p}{h_0} - E_{ip} \right\} \cdot \bar{\phi}^{(3)}(p) \\ = -2 \sum_{p=1}^M \bar{E}_{ip} \cdot \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh \lambda_0} \end{aligned} \quad (4.12)$$

上式は点 i の位置により次のように書かれる。

(a) 点 i が OA 上に在るとき ($i=1 \sim N_1$)、 $\bar{E}_{ij}^{(1)} \equiv 0$ で

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{N_1} \left(\delta_{ij} + \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1)} \right) \cdot \phi^{(1)}(j) \\ + \sum_{j=1}^{N_2} \left(\bar{E}_{ij}^{(2)} \phi^{(2)}(j) - E_{ij}^{(2)} \bar{\phi}^{(2)}(j) \right) \\ + \sum_{p=1}^M \left\{ \left(\sum_{s=1}^M \bar{E}_{is} \cdot f(s; p) \right) \cdot \frac{\Delta z_p}{h_0} - E_{ip} \right\} \cdot \bar{\phi}^{(3)}(p) \\ = -2 \sum_{p=1}^M \bar{E}_{ip} \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh \lambda_0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

(b) 点 i が AB 上に在るとき ($i=1 \sim N_2$)、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} \left(\bar{E}_{ij}^{(1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1)} \right) \phi^{(1)}(j) \\ - \sum_{j=1}^{N_2} \left(\delta_{ij} - \bar{E}_{ij}^{(2)} \right) \phi^{(2)}(j) + E_{ij}^{(2)} \bar{\phi}^{(2)}(j) \\ + \sum_{p=1}^M \left\{ \left(\sum_{s=1}^M \bar{E}_{is} \cdot f(s; p) \right) \cdot \frac{\Delta z_p}{h_0} - E_{ip} \right\} \bar{\phi}^{(3)}(p) \\ = -2 \sum_{p=1}^M \bar{E}_{ip} \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh \lambda_0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

式 (4.13) (4.14) における δ_{ij} は Kronecker のデルタで $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$; $= 1 (i = j)$ である。

(c) 点 i が BO 上に在るとき ($i=p=1 \sim M$)、 $\bar{E}_{ip} \equiv 0$ で

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} \left(\bar{E}_{ij}^{(1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1)} \right) \phi^{(1)}(j) \\ + \sum_{j=1}^{N_2} \left(\bar{E}_{ij}^{(2)} \phi^{(2)}(j) - E_{ij}^{(2)} \bar{\phi}^{(2)}(j) \right) \\ - \sum_{s=1}^M \left\{ f(p; s) \cdot \frac{\Delta z_s}{h_0} + E_{ps} \right\} \cdot \bar{\phi}^{(3)}(s) \\ = 2 \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh \lambda_0} \end{aligned} \quad (4.15)$$

尚上の各式における E_{ij} 、 \bar{E}_{ij} は次式により計算される。

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{\pi} \log(R_{ij}/h_0) \cdot \frac{\Delta s_j}{h_0} \\ E_{ii} &= \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{\Delta s_i / h_0}{2} - 1 \right) \cdot \frac{\Delta s_i}{h_0} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{1j} &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{R_{1j}} \left(\frac{\xi_j - \xi_i}{R_{1j}} d\eta_j - \frac{\eta_j - \eta_i}{R_{1j}} d\xi_j \right) \\ \bar{E}_{21} &= \frac{1}{2\pi} (\xi_s \eta_{ss} - \eta_s \xi_{ss})_i \cdot dS_i \\ dS_j &= \sqrt{(d\xi_j)^2 + (d\eta_j)^2} \\ d\xi_j &= \frac{1}{2} (\xi_{j+1} - \xi_{j-1}) \\ d\eta_j &= \frac{1}{2} (\eta_{j+1} - \eta_{j-1}) \\ \xi_s &= \frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2dS_i} \\ \xi_{ss} &= \frac{6}{dS_{i+1} + dS_i + dS_{i-1}} \left\{ \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{dS_{i+1} + dS_i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{dS_i + dS_{i-1}} \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

η_s, η_{ss} は ξ の代わりに η とおいたものである。

式(4.12)又は式(4.13)~(4.15)が領域(I)の境界面上のポテンシャル函数に関する連立方程式を与える。

(iii) 領域(II)における境界面上のポテンシャル函数

領域(I)に対すると反対に、境界面に対する法線の向きを内向き、積分方向を時計廻りに取り、領域(I)との接断面AB上の計算点 (ξ_j, η_j) を共通とする。自由表面DAを N_1^* ヶ、不透過面BCDを N_2^* ヶに分割し、DA, AB, BCD上のポテンシャル函数を夫々 $\phi_*^{(1)}, \phi_*^{(2)}, \phi_*^{(3)}$ で示す。すると、自由表面での条件式(3.6)と接断面ABにおける領域(I)の流体運動との力学的連続条件および不透過面における条件式(3.7)により、次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}_*^{(1)}(j) &= -\alpha \frac{\sigma^2 h_0}{g} \cdot \phi_*^{(1)}(j) \\ \bar{\phi}_*^{(2)}(j) &= \bar{\phi}^{(2)}(j), \quad \bar{\phi}_*^{(3)}(j) = \frac{1}{\beta} \phi^{(2)}(j) \end{aligned} \right\} (4.17)$$

第1式の負号は法線の向きが内側であることに由来する。更に E_{1j} の数値計算における式(4.16)の dS_j を常に正に取ることを前提とすると、領域(II)に対する式(2.3)の関係は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_*(i) + \sum_{j=1}^{N_1^*} \left(\bar{E}_{1j}^{(1)} + \alpha \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{1j}^{(1)} \right) \cdot \phi_*^{(1)}(j) \\ + \sum_{j=1}^{N_2^*} \left(\frac{1}{\beta} \bar{E}_{1j}^{(2)} \phi^{(2)}(j) - E_{1j}^{(2)} \bar{\phi}^{(2)}(j) \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} + \sum_{j=1}^{M^*} \bar{E}_{1j}^{(3)} \phi_*^{(3)}(j) = 0 \\ (i=1 \sim N_1^*, 1 \sim N_2, 1 \sim N_3^*) \end{aligned} \right\} (4.18)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} i=1 \sim N_1^* \text{ に対しては} \\ \phi_*(i) = \phi_*^{(1)}(i), \quad \bar{E}_{1j}^{(1)} = 0 \\ i=1 \sim N_2 \text{ に対しては} \\ \phi_*(i) = \frac{1}{\beta} \phi^{(2)}(i) \\ i=1 \sim N_3^* \text{ に対しては} \\ \phi_*(i) = \phi_*^{(3)}(i) \end{aligned} \right\} (4.19)$$

式(4.13)~(4.15)および(4.18)は、総数 $(N_1 + 2N_2 + M + N_1^* + N_3^*)$ ヶの未知量 $\phi^{(1)}(j)$, $(j=1 \sim N_1)$; $\phi^{(2)}(j)$, $\bar{\phi}^{(2)}(j)$; $(j=1 \sim N_2)$; $\bar{\phi}^{(3)}(p)$, $(p=1 \sim M)$ および $\phi_*^{(1)}(j)$, $(j=1 \sim N_1^*)$; $\phi_*^{(2)}(j)$, $(j=1 \sim N_2^*)$ に関する同数の連立方程式を与える。故に之を解いて未知量を定めれば、式(4.8)から A_0, A_n , 式(4.9)から $\phi^{(3)}(p)$ が決まり、式(2.5), (4.1)により、各領域内の速度ポテンシャルが求まることになる。

(iv) 力学的諸量の計算

上の結果により、力学的諸量は次のように知られる。

(a) 反射率

反射率 K_r は式(4.1)の意味から明らかなように

$$K_r = |A_0| \quad (4.20)$$

(b) 水面波形

区間DA, AOおよび原点Oより右側の区域での水面波形を夫々 ζ_0, ζ_1 および $\zeta(J)$ とすると式(3.2)(3.5)から次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\zeta_0}{\zeta_0} &= -i\beta \phi_*^{(1)}(j) \cdot e^{i\sigma t} \quad (j=1 \sim N_1^*) \\ \frac{\zeta_1}{\zeta_0} &= -i\phi^{(1)}(j) e^{i\sigma t} \quad (j=N_1 \sim 1) \\ \frac{\zeta(J)}{\zeta_0} &= -i \left[e^{ikx} + A_0 e^{-ikx} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-knx} \right] \cdot e^{i\sigma t} \quad (x > 0) \end{aligned} \right\} (4.21)$$

その他の諸量も速度ポテンシャルから容易に求められる。

(v) 数値計算例

上記の方法はABおよびBCDが不規則な形をし

ている一般の場合に対応するものである。ここでは簡単のため Fig. 2 に示すように、不透過な水平海底面上で、且つ鉛直な壁面の前に、天端幅 B の鉛直前面および一定勾配をもつ透過護岸がおかれている場合を考え $B=h$ および $2h$ に対し斜面が鉛直になったときと 1:1 および 1:2 の勾配をもつときについての計算例を示すこととする。

計算点の配置は図に示すように OA, AD 上に夫々 10 点, OB, AB, DC 上に夫々 10 点を設け、式 (4.1) の級数項を第 n^* 項までとすると、 $n^*=9$ とする。かくして与えられた $\sigma^2 h/g$ に対し、総数 80 ケの連立方程式を解いて容易に解を求めることが出来る。

尚鉛直護岸の場合は、面 AB と OB が一致するので、式 (4.13)~(4.15) および式 (4.18) の代りに次式を用いて計算する必要がある。即ち点 A を点 O に一致させ、

(i) 点 i が OD 上にあるとき ($i=1 \sim N_1^*$)

$$-\sum_{j=1}^{N_1^*} (\delta_{ij} + \alpha \cdot \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{*(1)}) \phi_*^{(1)}(j) + \sum_{j=1}^{N_3^*} \bar{E}_{ij}^{*(3)} \phi_*^{(3)}(j) + \sum_{p=1}^M \left\{ \left(\sum_{s=1}^M \frac{1}{\beta} \bar{E}_{is}^{*(2)} f(s; p) \right) \cdot \frac{dz_p}{h_0} - E_{ip}^* \right\} \bar{\phi}_*^{(2)}(p) = -\frac{2}{\beta} \sum_{p=1}^M \bar{E}_{ip}^{*(2)} \frac{\cosh k(z_p+h)}{\cosh \lambda_0} \quad (4.22)$$

(ii) 点 i が DCB 上にあるとき ($i=1 \sim N_3^*$)

$$-\phi_*^{(3)}(i) + \sum_{j=1}^{M_1^*} (\bar{E}_{ij}^{*(3)} - \alpha \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{*(3)}) \cdot \phi_*^{(3)}(j)$$

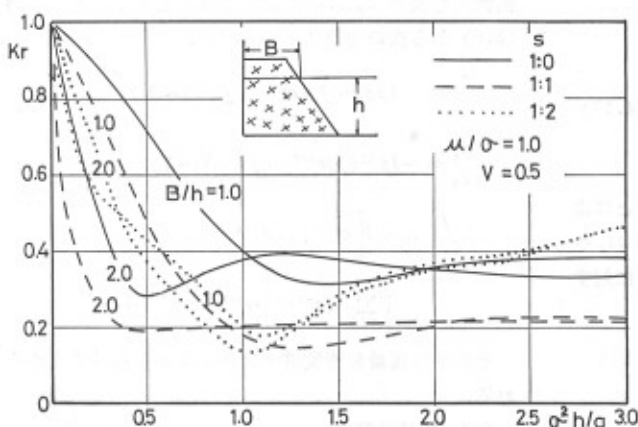


Fig. 3 Reflection Coefficients of Permeable Slopes

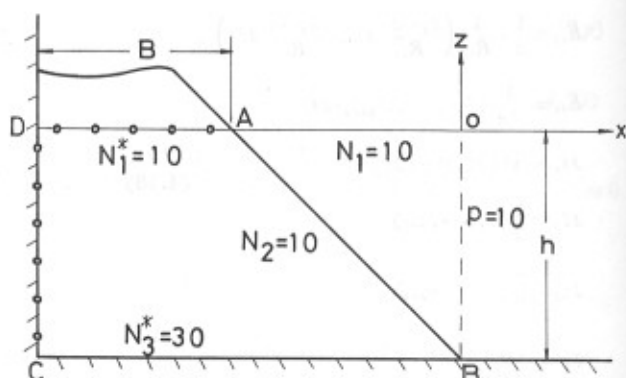


Fig. 2 Distribution of Calculation points

$$+\sum_{p=1}^M \left\{ \left(\sum_{s=1}^M \frac{1}{\beta} \bar{E}_{is}^{*(2)} f(s; p) \right) \cdot \frac{dz_p}{h_0} - E_{ip}^* \right\} \bar{\phi}_*^{(2)}(p) = -\frac{2}{\beta} \sum_{p=1}^M \bar{E}_{ip}^{*(2)} \frac{\cosh k(z_p+h)}{\cosh \lambda_0} \quad (4.23)$$

(iii) 点 i が OB 上にあるとき ($i=p=1 \sim M$)

$$\sum_{j=1}^{N_1^*} (\bar{E}_{ij}^{*(1)} - \alpha \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{*(1)}) \phi_*^{(1)}(j) + \sum_{j=1}^{N_3^*} \bar{E}_{ij}^{*(3)} \phi_*^{(3)}(j) - \sum_{s=1}^M \left\{ \frac{1}{\beta} f(p; s) \cdot \frac{dz_s}{h_0} + E_{ps}^* \right\} \bar{\phi}_*^{(2)}(s) = \frac{2}{\beta} \frac{\cosh k(z_p+h)}{\cosh \lambda_0} \quad (4.24)$$

(この場合積分方向は反時計回り、法線方向は外向きとしている。)

また鉛直護岸の場合は、上記の方法の外に、著者²⁾が既に示したように、速度ポテンシャルの接続法によって計算することも出来る。何れの方法によつても同一の結果を得ることが出来るはずである。

Fig. 3 は上記の方法による $V=0.5$, $\mu/\sigma=1.0$ とした場合の $\sigma^2 h/g$ に対する反射率 K_r の計算値を示したものである。図における $B/h=1.0$ および 2.0 の鉛直護岸に対する値は速度ポテンシャルの接続法²⁾によるものと全く一致している。そして幅 B が大きい程反射率は相当に小さく、消波作用が良いことを示しており、この傾向は 1:1 の斜面の場合 $\sigma^2 h/g < 1$ に対して見られるが、1:2 の緩斜面になると、幅 B の影響は余り見られず、反射率は天端幅に関係しなくなる傾向が見られる。更に

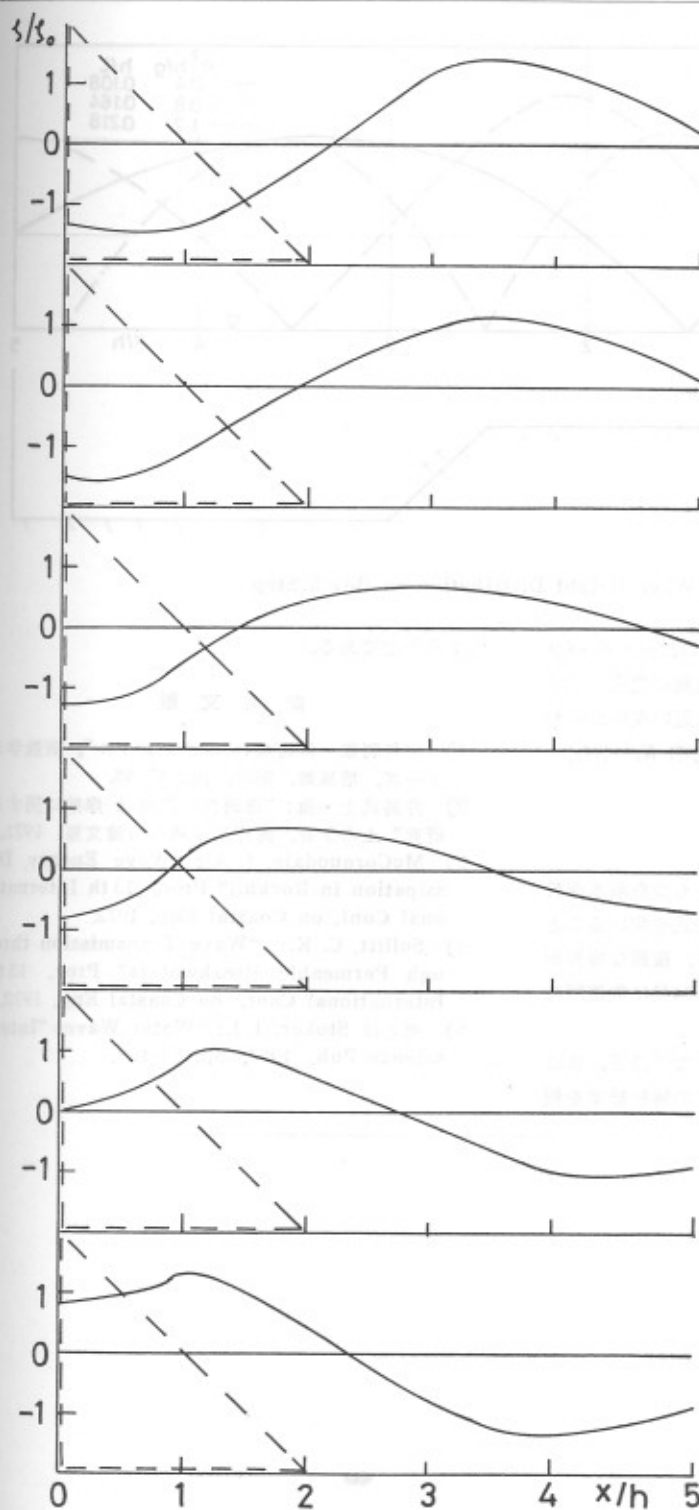


Fig. 4 Time History of Surface Wave Profiles (at every 1/6 Period)
Slope $s=1:1$, Crown Width $B=h$, $\sigma^2 h/g=0.6$, $h/L=0.137$

$\sigma^2 h/g < 1$ では、鉛直面よりも反射率は概ね小さいが、1:1の場合よりはむしろ大きいということが分る。即ちこの計算の結果では勾配のある方が反射率は小さくなるが、余り緩勾配となると逆になるという、経験と一致しないことが示される。この事は、実はこの計算の基本仮定が、微小振幅波を仮定しているため、斜面における波の変形砕波によるエネルギー損失の効果を考えていないことによるもので、計算法の誤りではなく、現象を正しく表わすためには、波の有限振幅性を考慮して計算結果を修正する必要があることを示唆している。

然し 1:1 又は鉛直護岸の場合は、波の変形、砕波は殆んど起らないことが多いから、この計算の結果は、かなり實際を良く表わしていると見ることが出来る。特に波長の短い $\sigma^2 h/g > 1.5$ では殆ど一定の反射率を示す傾向にあることは合理的である。

Fig. 4 は $B/h=1.0$, 勾配 1:1 の場合 $\sigma^2 h/g=0.6$ の波に対する水面波形の時間的変化を $T/6$ 毎に示したもので、透過性斜面での波の変形の様子が見られる。

5. 不透過斜面による波の変形

Fig. 1 において、面 AB が不透過な場合に相当する。このときは、式 (4.12) 又は (4.13) ~ (4.15) において、 $\bar{\phi}^{(0)}(f) = 0$ とおけば良く、勿論式 (4.18) は考える必要はない。一例として Fig. 5 に示すような 1:1 の斜面と平坦な棚部とから成る階段状汀線の場合について計算し、水面波高の分布を示すと、図のようである。之は $\sigma^2 h/g$ とそれに対応す

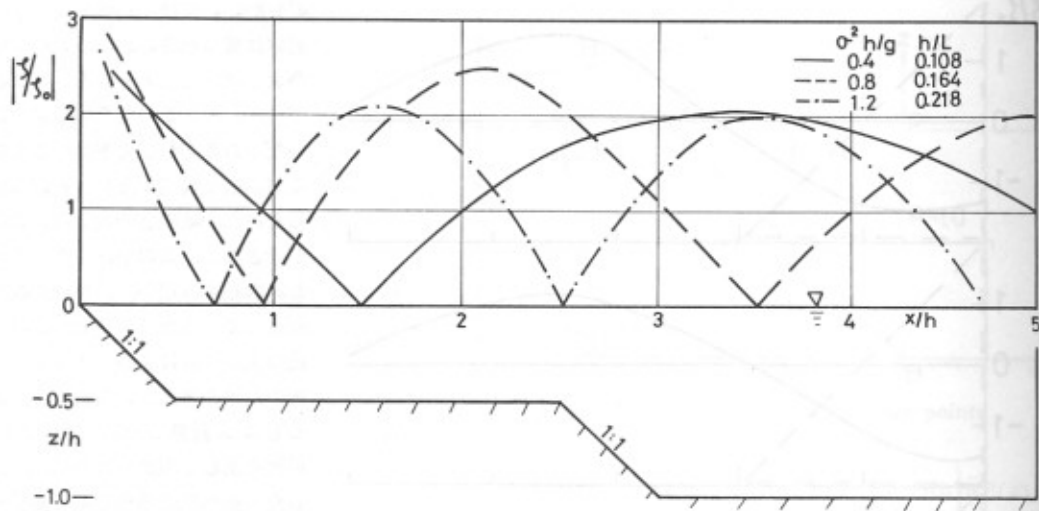


Fig. 5 Wave Height Distribution on Beach Step

る相対水深 ($=h/L$: L は水深 h での波長) をパラメーターとして汀線から沖に向つて波高の変化を示すが、特に $\sigma^2 h/g=0.8$ において共振に近い現象が現われることが分る。勿論この場合は反射率 $K_r=|A_0|=1.0$ である。

6. む す び

上述のように、速度ポテンシャルをもつ有限水深波の2次元境界値問題は、グリーンの公式を用いることにより、境界条件が線型である限りは、複雑な境界面の場合でも、又透過性物質の場合でも容易に数値解析が行なわれることが分る。

尚本論文に引続き、透過性の一般的な防波堤、或は没水および半没水物体の場合についての解析結果を報

告する予定である。

参 考 文 献

- 1) 宇野利雄・洪姪植: “ポテンシャル”, 新数学シリーズ, 培風館, 昭36. pp. 47-48.
- 2) 井島武士・他: “透過性防波堤と岸壁に関する研究” 土木学会, 海岸工学講演会論文集, 1971.
- 3) McCorquodale, J. A.: “Wave Energy Dissipation in Rockfill” Proc. 13th International Conf. on Coastal Eng. 1972.
- 4) Sollitt, C. K.: “Wave Transmission through Permeable Breakwaters” Proc. 13th International Conf. on Coastal Eng. 1972.
- 5) 例えば Stoker, J. J.: “Water Waves” Interscience Pub. 1957, pp. 69-109.