

三維數值水槽之開發與研究(III)

周宗仁¹ 石瑞祥² 翁文凱³

¹國立台灣海洋大學河海工程學系教授

²東南技術學院營建科技系副教授

³國立台灣海洋大學河海工程學系副教授

摘要

本文乃利用邊界元素法以 Lagrange 之描述流體運動之觀點在時間領域內配合時間之前進差模式(time marching procedure)來建立一數值模式，模擬三維波浪之造波、傳遞與變形之問題，期能藉由此數值模式來模擬實際平面水槽之各種造波問題。考量未來之發展，本文模式在造波邊界採用較先進並廣為採用的蛇形造波機(serpent-type wave generator) 之造波方式，造波單元可視為由許多活塞式造波板所組成，本文初步以單方向造波方式模擬孤立波來檢驗模式之正確性，解析過程並考量自由水面之非線性條件。本文對三維水槽各邊界之元素分割方式採取將邊界分割成許多四邊形線形元素。由於計算矩陣相當龐大，需要相當快的運算器與龐大的記憶體容量，故在矩陣計算上採用所謂的平行電腦運算技術來解決此問題以便增快運算之速度並增進結果之精確性。經實際模擬孤立波之造波後得到令人滿意的結果。

Development of 3-D Wave Basin by BEM (III)

Chung-Ren Chou Ruey-Syan Shih Wen-Kai Weng

ABSTRACT

This study investigates a numerical simulation of three-dimensional wave making problem of fully nonlinear water surface condition by boundary element method with linear tetragon- elements. The numerical scheme is based on the Lagrangian description together with finite differencing of the time derivative. An algorithm to generate wave with any prescribed form was also implanted in this scheme. In this study a multidirectional piston wave generator is selected, well known as "serpent-type wave generator", although it is clear that paddle of any desire type can be simulated, unidirectional solitary wave is simulated for simplicity. When it encounters singular points in mathematics and geometry, conformal mapping and triple-node method are applied respectively. We will consider several smoothing methods to smooth the results.

一、前言

數值模式之建立除了需仰賴精確的數值方法外，更需要有適合的工具來完成極為複雜的計算。在電腦尚未普及之年代，往往需仰賴大型的工作站來完成，故對於數值水槽的開發雖已有很長的歷史，但從早期的造波理論開始，早在 1929 年即有

Havelock 之造波理論出現，隨即有 Ursell (1959) 等，探討造波板之移動擺幅 (stroke) 與波高之關係等。隨著近二十年來的 80 年代開始，電腦的迅速發展與普及化，成就了許多不同的數值模式逐漸被開發，從二維的數值水槽、直到目前極為熱門的三維數值水槽，而採用的數值方法如有限差分法、有限元素法、邊界元素法、無網格法等，許多在實驗室

無法探索的物理現象亦可利用數值模擬來之方式來加以探討。對於數值造波水槽所遇到的問題，如變動的邊界及自由水面的非線性條件等，除了利用微變法作解析或是將問題簡化成為線性問題後求解外，有些則利用理論配合數值方法或直接以數值方法解析非線性之問題。數值造波水槽之開發首先以水箱內流體之擾動問題為基礎，配合造波理論之控制方程式開發為數值波水槽，自由水面之線性條件逐漸被高階之非線性條件取代，並考慮時變性問題。

關於三維數值水槽的開發過程，大多以研究二維水槽之數值基礎來加以延伸推廣到三維模式。但在三維造波水槽的開發方面，由於在開發三維數值水槽的過程中，無論採用何種數值方法，所佈置、設定的節點數量都遠遠超過二維數值水槽的節點數，在模擬上較為困難。Boo 與 Kim (1994) 等人考量非線性條件下，利用邊界元素法之高次元素(HOBEM)方法所建立之數值模式來同時模擬二維及三維之波浪問題，但所採用的為 Eulerian scheme 描述流體運動，且直接以造波條件代入邊界條件來進行不規則波浪的數值模擬，而非採用造波機理論。此模式隨即被 Kim 與 Kim (1997) 延伸為時間領域之模式(THOBEM)來探討波、流對半潛式球體及四方形柱體等之交互作用利變化及其溯上問題。Celebi (1998) 等利用 DBIEM 及 MEL 法所建立之三維水槽探討波浪行經圓柱體後之水面波形變化，同樣直接在邊界上帶入波浪條件來模擬波浪，水槽之邊界上並設有三個消波區段 Park Kim 以及 Miyata (1999) 在三維的數值水槽中運用完全非線性波的模式，進行自由水面運動的模擬。Ikeno (2000) 利用 BEM 以四邊形元素(quadrilateral element)所建立之水槽來探討波浪通過浮體結構物後，非線性波浪之變化。Kim (2001) 等人運用有限差分法及時間差分模擬出非線性的三維造波水槽。Grilli (2001, 2002) 等運用 BEM 配合時間差分模擬非線性的三維造波水槽，並討論沒水結構於水槽中對波浪之影響。

Chou (1996) 等十多年來利用邊界元素法以 Lagrangian scheme 配合時間差分觀念成功的開發並利用二維造波水槽解析孤立波、週期波及隨機波浪等受任意海底地形影響之反射、消能、碎波及變形問題，同時也討論潛堤對波浪之影響。數值模式為時變性之時間領域內解析波浪波動問題，解析過程

涉及變動邊界之問題，各邊界之形狀及形狀函數等隨時間而改變，故屬於不定常之問題。本文以二維水槽之研究為基礎，來進行三維水槽的模式建立與造波模擬，運用四點節點元素所建立之數值模式，即將三維水槽的界面切割呈許多微小的四邊形線形元素，利用 BEM 解析邊界值問題。由於 2D NWT 無法描述繞射之現象，故 3D 模式之建立能更確實的模擬波浪受地形或結構物影響後的反射、折射與繞射問題，並進一步探討任意港池之遮蔽效果。不同於一般的 3D 水槽只是將波形條件視為已知條件代入，為使本文之數值水槽更接近實際實驗室裡之水槽，同時考量將來多方向入射波之模擬，本文模式建立時採用目前世界上極為熱門的蛇型(serpent type)多方向不規則波造波機之造波條件，模擬時可將造波邊界視為一系列各自獨立的活塞式造波機，可模擬不同入射方向之造波。本研究將先以單方向孤立波為例來檢驗模式之正確性，以便將來進一步進行單方向及多方向之週期波、不規則波、短峰波等的模擬。

二、基本方程式及數值分析

2.1 積分方程式

如圖 1 所示，虛擬三維數值造波水槽的座標原點 O 定於靜水面 ($x-y$) 與造波機靜止時的左側交接處， z 軸垂直向上。造波水槽為由自由水面 Γ_1 、虛擬多方向不規則造波機 Γ_2 、水槽右側不透水垂直固定岸壁 Γ_3 、水槽左側不透水垂直固定岸壁 Γ_4 、水槽後側不透水垂直固定岸壁及任意港池 Γ_5 及不透水固定海底 Γ_6 所圍成的封閉領域。

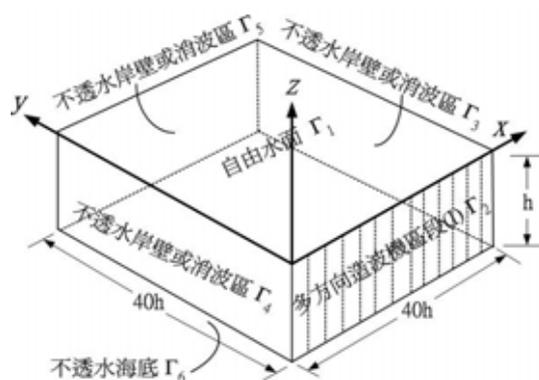


圖 1 三維數值平面水槽示意圖

造波水槽內的流體假定為非壓縮性、非粘性、非旋性的理想流體，流體從靜止狀態開始運動，即造波水槽的流體運動具有滿足下列 Laplace 方程式的速度勢 $\Phi(x, y, z; t)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

根據 Green 定理，流體內任意一點的速度勢 Φ 可由邊界上的速度勢及其在法線方向的導函數以下式積分方程式表示

$$\gamma \Phi + \int \Phi \bar{q}^* dA = \int \bar{\Phi} q^* dA \quad (2)$$

其中

$$q^* = 1/4\pi r \quad , \quad \bar{q}^* = \partial q^* / \partial n$$

r 為流體內任意一點與邊界上任意一點間的距離， n 表示向外法線。對領域內任意一點 $\gamma=1$ ，對平滑的邊界，當任意點相當接近邊界上時， $\gamma=0.5$ 。

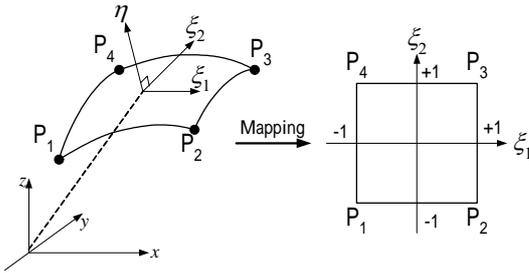


圖 2 無次元座標轉換示意圖

2.2 積分方程式的離散化

由於邊界由上述六個不同的邊界組成，故將上式改寫成

$$\gamma \Phi + \sum_{p=1}^6 \int_{\Gamma_p} \Phi \bar{q}^* dA = \sum_{p=1}^6 \int_{\Gamma_p} \bar{\Phi} q^* dA \quad (3)$$

本研究採用平面一次元素，由 $x-y-z$ 轉換為 $\xi_1 - \xi_2 - \eta$ 的無次元座標系統，如圖 3 所示，形狀函數為

$$\begin{cases} N_1 = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)/4 \\ N_2 = (1 + \xi_1)(1 - \xi_2)/4 \\ N_3 = (1 + \xi_1)(1 + \xi_2)/4 \\ N_4 = (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)/4 \end{cases} \quad (4)$$

對各邊界面以 N_p ($p = 1 \sim 6$) 個節點組成的平面一

次元加以離散，並可得

$$\Phi_i + \sum_{p=1}^6 \sum_{j=1}^4 h_{ij}^s \Phi_j = \sum_{p=1}^6 \sum_{j=1}^4 g_{ij}^s \bar{\Phi}_j \quad (5)$$

式中

$$h_{ij}^s = -\frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_s \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{ij}} d\xi_1 d\xi_2 \quad (s=1\sim 4) \quad (6)$$

$$g_{ij}^s = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_s \frac{1}{r} \Big|_{\Gamma_{ij}} d\xi_1 d\xi_2 \quad (s=1\sim 4) \quad (7)$$

當 $i \neq j$ 時，本文採用 Gauss 積分進行數值積分

$$h_{ij}^s = -\frac{1}{8\pi} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n w_l w_m N_s \frac{1}{r_{ilm}^2} \frac{\partial r_{ilm}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{ij}} \quad (s=1\sim 4) \quad (8)$$

$$g_{ij}^s = \frac{1}{8\pi} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n w_l w_m N_s \frac{1}{r_{ilm}} \Big|_{\Gamma_{ij}} \quad (s=1\sim 4) \quad (9)$$

式中 r_{ilm} 為源點 i 至被積分元素 j 的 Gauss 積分點間的距離。

當 $i = j$ 時，由於 $\partial r / \partial n = 0$ 得

$$h_{ij}^s = 0 \quad (s=1\sim 4) \quad (10)$$

對(9)式，當 $i = j$ 時會產生特異值，所以必須加以處理。如圖 3 所示，對某一被積分元素，其節點為 P_1 、 P_2 、 P_3 及 P_4 ，若討論節點為 P_1 時，先將四邊形元素分割成兩個三角形元素 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 與 $\Delta P_1 P_3 P_4$ ，再將其保角變換成正方形元素。

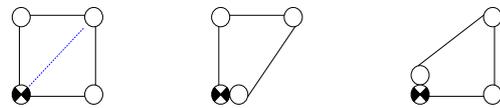


圖 3 奇異積分處理示意圖

2.3 平行計算

採用邊界元素法時，係數矩陣並不具有對稱的特性，必須直接作逆矩陣的運算，運用在工程上描述一個實際問題時，若所切割的元素太少，則無法真實而正確的模擬出波浪之物理特性，然元素過多則又相當耗時，比方說在最簡單的無地形地物之數值水槽，當尺寸為 20m × 20m × 0.5m 時，本文之自

由水面的節點數為 1681，再加上其他五面的節點數，大約為 2450 個，再加上其他的邊界條件，所必須處理的超大型矩陣相當的耗時，除了需要較高速的電子運算器之外，更需要大量的記憶空間，以目前的一般個人電腦或工作站是極難完成的。為解決此問題，周等(2003, 2004)利用所謂的叢集電腦技術(平行電腦, PC Cluster)來計算，此項技術雖然發展的歷史不長，但在近十年來已開始被廣泛運用。此法乃採取分工的做法，交由不同的電腦來作運算，以提高運算之速度，效果令人滿意。本研究將原本透過四部主機所組成的平行電腦延伸為由八部主機來做大型矩陣的運算，將逆矩陣分割成六十四個(8×8)子矩陣，透過八部主機同步計算以縮短計算時間及解決矩陣過大的問題，並利用超高速乙太網路設備解決叢集電腦內各主機間資料交換延遲的相關問題。

本研究是透過逆矩陣的分割來達成，假設有 n 個聯立方程式，使用逆矩陣的運算。遇數學上特異點時，則運用保角映像法來消除；遇幾何學上邊界的不連續時則利用三節點法來解決不同邊界條件之共存問題。另外在數值計算之過程為減少誤差之累積，以節點間距離平方之反比為權重加以平滑化，未來可考慮其他多種不同的平滑方式。

三、結果與分析

3.1 孤立波造波模擬

如前面所述，本文之模式採用蛇型多方向不規則造波機之造波條件，造波邊界上之元素可視為一系列各自獨立的活塞式造波機，然實際在計算上與真實的造波機不同，數值計算上各元素(各造波板)間之運動會產生不連續現象，為解決此問題，在造波邊界元素上令各節點為鉸鍊(hinge)，造波版間形成鍊狀而非塊狀的，如圖 4 所示，雖然未來可模擬不同入射方向之入射波浪，但本文目前以測試等深水槽單方向孤立波為例來檢驗模式之正確性。解析領域各邊界以 $N_i (i=1\sim 6)$ 個節點加以分割，即領域內所有節點數 $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$ ，其中自由水面節點數 $N_1 = 1681$ ，其餘各面分別為 $N_2 = 42$ 、 $N_3 = 82$ 、 $N_4 = 82$ 、 $N_5 = 82$ 、 $N_6 = 441$ ，水槽大小為 $40h \times 40h \times h$ (h 為水深=0.5m)，造波條

件為 $\zeta/h = 0.2$ ，時間差分間隔為 $\Delta t = t_c/100$ 。圖 5 為孤立波造波過程之水面變化。在模擬過程中，數值模式的穩定性與二維數值水槽之模擬過程相似，courant 係數對模擬結果有很大的影響，根據石等(1997)之研究結果，當時間間 Δt 距若取太大，會導致孤立波後面無法收斂而快速下降，使計算過程產生不穩，三維水槽模式亦有此現象，然由於 3D 模式之元素遠較 2D 模式多，計算時間相當耗時，故該如何適當的選擇時間間距，實為模式成功的重要關鍵之一。

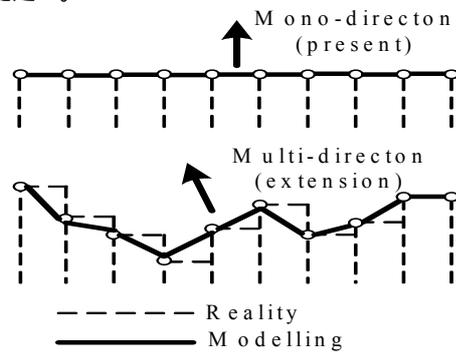


圖 4 數值水槽蛇形造波板示意圖

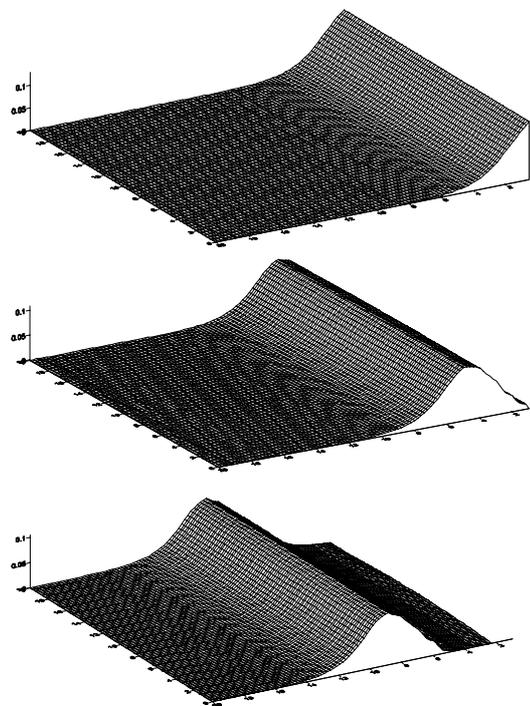


圖 5 孤立波造波過程時自由水面之變化

3.2 質能守恆(數值計算準確性)

為探討本文模式之正確性，領域內流體之總能量與總質量等必須遵守物質不滅原理，即能量守恆(conservation of energy)與質量守恆(conservation of mass)定理。孤立波為單一波峰之波形，水面上之總質量應等於造波板推出所排開之液體質量，而領域內之總能量應等於造波板所傳遞之能量總合，當造波板推出後即停止，故總質量及總能量即應達成一定值。理論上單位寬度之孤立波質量與能量之近似值可由下列兩式求得：

$$M = 4h^2 \sqrt{\frac{\zeta}{3h}} \quad (11)$$

$$E = \frac{8}{3} \rho g h^2 \zeta \sqrt{\frac{\zeta}{3h}} \quad (12)$$

圖 6 (a) (b)所示分別為模擬孤立波之總能量與總質量隨時間之變化，能量變化在波浪推出後即停止，保持在一定值，而質量變化的理論上亦應如此，惟在孤立波推出後尾部有些微下降至水面以下，故所顯示之曲線有些微下降，但此現象如前所述可以適當的縮小時間間距或元素大小來加以改善。

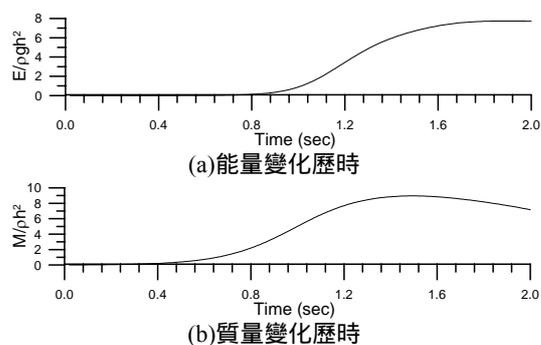


圖 6 孤立波造波過程之能量與質量變化歷時

四、結論

本文模式為初步以模擬單方向孤立波之造波與傳遞過程驗證後，證實模式之正確性，未來將進行週期波、不規則波之模擬，並推展到多方向之孤立波，規則與波，不規則及短峰波之波造及驗證。

將平行計算由四部電腦推展到八部電腦同時計算，以增加計算之速度，同時將增加分割元素數目使水槽之範圍擴大至較合理長度與寬度，朝向解 40000 × 40000 之超大型矩陣邁進，以便將來配置港池模型或離岸結構物於水槽中，同時可搭配動畫軟體將數值結果可視化。本文模式未來並可同時考量實際實驗室的多方向造波水槽所面臨的有效造波區範圍，將模式的單造波機區列增加為兩區列或三區列，研發為所謂的 L 型造波水槽或 U 型造波水槽。

謝誌

本研究承國科會專題研究計畫「三維數值造波水槽開發研究(III)」(NSC94-2611-E-019-010)補助，謹致感謝之意。

參考文獻

1. Boo, S.Y., Kim, C.H. and Kim, M.H. (1994) "A Numerical Wave Tank for Nonlinear Irregular Waves by 3-D Higher Order Boundary Element Method," *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, Vol. 4, No. 4, pp. 265~272.
2. Celebi, M. S., Kim, M. H. and Beck, R. F. (1998) "Fully Nonlinear 3-D Numerical Wave Tank Simulation," *Journal of Ship Research*, Vol. 42, No. 1, pp. 33~45.
3. Chou, C.R., Shih, R.S. and Yim, Z.J. (1996) "Two-dimensional Wave-making Problem," *18th world conference on the boundary element method, Computational Mechanics Publication*, pp. 649~ 658.
4. Grilli, Stephan, T., Sylvia Vogelmann and Frederic Dias, (2001) "A Fully Non-linear Model for Three-dimensional Overturning Waves Over an Arbitrary Bottom," *International Journal for Numerical Method in Fluids*, Vol. 35, pp. 829-867.
5. Grilli, Stephan, T., Sylvia Vogelmann, and Philip Watts, (2002) "Development of a 3D

- Numerical Wave Tank for Modeling Tsunami Generation by Underwater Landslides,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, pp. 301-313.
6. Ikeno, M. (2000) “A Numerical Model for 3-D Floating Body Motion in Nonlinear Waves Using the BEM,” *The 10th International Offshore and Polar Engineering Conference*, Vol. 3, pp. 201~ 208, Seattle, USA.
 7. Kim, D. J. and Kim, M. H. (1997) “Wave-current Interaction with Large Three-dimensional Body by THOBEM,” *Journal of Ship Research*, Vol. 41, No. 4, pp. 273~285.
 8. Kim, M. H., Niedzwecki, J. M., Roesset, J. M., Park, J. C., Hounq, S. Y. and Tavassoli, A. (2001) “Fully Nonlinear Multidirectional Wave by 3-D Viscous Numerical Wave Tank,” *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 123, pp. 124-133.
 9. Park, J.G., Kim, M.H. and Miyata, H. (1999) “Fully Non-linear Free-surface Simulations By A 3D Viscous Numerical Wave Tank,” *International Journal for Numerical Methods in Fluid*, Vol. 29, pp. 685~703.
 10. Ursell, F., Dean, R.G. and Yu, Y.S. (1959) “Forced Small-Amplitude Water Waves : A Comparison of Theory and Experiment,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 7, part 3, pp. 33-52.
 11. 石瑞祥 (1997) : “ 二維斷面數值造波水槽之研究 ” , 國立臺灣海洋大學河海工程研究所博士學位論文。
 12. 周宗仁, 林騰威, 翁文凱 (2004) : “ 三維數值水槽之開發與研究(I) ” , 第二十六屆海洋工程研討會論文集, 台灣大學, pp.109~115。
 13. 周宗仁, 林騰威, 翁文凱 (2005) : “ 三維數值水槽之開發與研究(II) ” , 第二十七屆海洋工程研討會論文集, 台中中興大學, pp.15~20。