

## 三維數值水槽之開發與研究(II)

周宗仁<sup>1</sup> 林騰威<sup>2</sup> 翁文凱<sup>3</sup>

### 摘要

本文以邊界元素法建立一模擬非線性造波問題之數值模式，在考量水面為強非線性條件下，在時間領域內以 Lagrange 法描述流體運動，配合時間差分解析三維波浪之造波、傳遞與變形之問題，於虛擬造波邊介面導入各種造波條件，藉由此數值模式來模擬實際造波水槽之各種造波問題，本文解析時採用活塞式造波機之造波條件，模擬活塞式造波機之造波過程，解析過程並考量其自由水面之非線性條件。利用邊界元素法解析邊界值問題，採用四邊形線形元素，分別使用保角映像法及三節點法來解決數學上的特異點及不同邊界條件之共存問題，另外在計算上採用平行電腦來處理以增加運算速度。

### Development of 3-D Wave Basin by BEM (II)

C.R. Chou T.W. Lin W.K. Weng

### ABSTRACT

This study investigates a numerical simulation of three-dimensional wave making problem of fully nonlinear water surface condition by boundary element method with linear tetragon- elements. The numerical scheme is based on the Lagrangian description together with finite differencing of the time derivative. An algorithm to generate wave with any prescribed form was also implanted in this scheme. In this study a multidirectional piston wave generator is selected, although it is clear that paddle of any desire type can be simulated. When it encounters singular points in mathematics and geometry, conformal mapping and triple-node method are applied respectively. We will consider several smoothing methods to smooth the results.

### 一、前言

隨著電腦的迅速發展與普及化，利用不同數值方法所建立的數值模式逐漸被開發，大多的物理問題都可以用數值模擬來解。而數值造波水槽所遇到的問題牽涉到變動的邊界問題及自由水面的非線性條件，一般解決這些問題之方法主要有利用微變法作解析，或是將問題簡化成為線性問題後求解，有些則利用理論配合數值方法或直接以數值方法如邊界元素法、有限元素法、及有限差分法等解析非線性之問題。

對於開發數值水槽的開發已有很長的歷史，從造波理論開始、二維的數值水槽、直到現在的三維數值水槽；早在 1929 年即有 Havelock 之造波理論出現，隨即有 Ursell (1959) 等，探討造波板之移動擺幅 (stroke)  $S$  與波高  $H$  之關係。

關於二維數值水槽的開發過程，Faltisen (1978) 利用邊界積分方法，探討二維數值水槽中流體的擾動問題，在不同時間下，以 Eulerian 法描述自由水面上動點的運動情形，此動點之  $x$  軸座標固定不動，僅在  $z$  軸上下運動。大山 (1985) 以邊界元素法解析孤立波通過任意海底地形後，因反射而作用於垂直岸壁之波力，同時比較不同海底坡度與波力及波面上昇等之相互關係，以此為基礎在以週期性非線性波理論探討數值水槽波浪之變形問題及結構

1. 國立台灣海洋大學河海工程學系教授  
2. 國立台灣海洋大學河海工程學系研究生  
3. 國立台灣海洋大學河海工程學系副教授

物四周因波力之作用所產生的影響。Brasen 與 Larsen (1987) 以邊界積分法解析分線性重力波之造波問題，同時又探討孤立波於半開放水槽中傳遞時，遇垂直壁而反射之過程的入、反射波之波形比較。剛村、八嶽 (1987) 及 Sugino 與 Tosaka (1990) 等均以邊界元素法解析孤立波在水槽中之造波、傳輸以及變形問題，前者以 Lagrangian 法而後者同時配合 Eulerian 及 Lagrangian 之混合應用法。Chou (1996) 等利用邊界元素法以 Lagrangian 法配合時間差分觀念解析孤立波及週期波受任意海底地形影響之變形問題，同時也討論潛堤對波浪之影響。

在三維造波水槽的開發方面，由於在開發三維數值水槽的過程中，無論選擇何種方法，所佈設的節點數目都遠超過二維數值水槽，在模擬上較為困難。Boo 與 Kim 等人 (1994) 考量非線性條件下，利用邊界元素法之高次元素進行不規則波浪數值水槽的模擬。Park、Kim 以及 Miyata (1999) 在三維的數值水槽中運用完全非線性波的模式，進行自由水面運動的模擬。Kim (2001) 等人運用有限差分法及時間差分模擬出非線性的三維造波水槽。Grilli (2001) 等人運用邊界元素法，採用 16 點節點元素及 25 點節點元素配合時間差分模擬出非線性的三維造波水槽，並隨後討論有沒水結構於水槽中的造波情形 (Grilli 等人, 2002)。

數值造波水槽之開發首先以水箱內流體之擾動問題為基礎，配合造波理論之控制方程式開發為數值波水槽，自由水面之線性條件逐漸被高階之非線性條件取代，並考慮時變性問題。

本文數值模式採在時變性之時間領域內解析波浪波動問題，解析過程涉及變動邊界之問題，各邊界之形狀及形狀函數等隨時間而改變，故屬於不定常之問題。本計畫採用邊界元素法來進行三維水槽的模擬，運用四點節點元素以 Lagrangian 法配合時間差分觀念為基礎所建立之數值模式，期能更確實的描述波浪之溯上、下降等現象。本文解析時採用活塞式造波機之造波條件，模擬活塞式造波機之造波過程，解析過程並考量其自由水面之非線性條件。做法上是將三維水槽的界面切割呈許多微小的四邊形線形元素，利用邊界元素法解析邊界值問

題。遇數學上特異點時，則運用保角映象法來消除；遇幾何學上邊界的不連續時則利用三節點法來解決不同邊界條件之共存問題。另外在數值上所產生的誤差，將以節點間距離平方之反比為權重加以平滑化，屆時會考慮多種平滑方式。在計算上採用平行電腦來處理以增加運算速度。

## 二、基本方程式及數值分析

邊界元素法係將邊界法利用有限元素法中之分離化法 (discretization) 來做計算。例如 Laplace 方程式之齊次微分方程式，其積分方程式為邊界上之積分方程式，只須對邊界進行分離化即可。應用積分方程式解析邊界值問題 (Boundary Value Problem) 係自古即被熟知之方法，但是以往由於電子計算機尚未十分發達，故大多只於將導出之積分方程式，在邊界上選定若干個有限等分，假定各等分上函數值一定，而以各等分上之中間點之值代表之，然後求出各點之值。現在由於高性能之電子計算機已被開發，故在邊界元素法上之函數值亦可如有限元素法作種種之變化。

邊界元素法之方程式中，對實際之問題，其邊界均呈現非常複雜形狀，故必須將邊界分割成若干個邊界元素，此程序稱為分離化，分離化所得之元素成為分離化元素。但是邊界元素法中對同一次度領域之問題，其邊界元素之次度比有限元素法低一次，例如對二次度問題，邊界元素法之邊界元素為一次度之線分元素，對三次度問題則為二次度之平面元素。

### 2.1 積分方程式的表示

如圖 1 所示，虛擬三維數值造波水槽的座標原點 0 定於靜水面 ( $x-y$ ) 與造波機靜止時的左側交接處， $z$  軸垂直向上。造波水槽為由自由水面  $\Gamma_1$ 、虛擬多方向不規則造波機  $\Gamma_2$ 、水槽右側不透水垂直固定岸壁  $\Gamma_3$ 、水槽左側不透水垂直固定岸壁  $\Gamma_4$ 、水槽後側不透水垂直固定岸壁及任意港池  $\Gamma_5$  及不透水固定海底  $\Gamma_6$  所圍成的封閉領域。

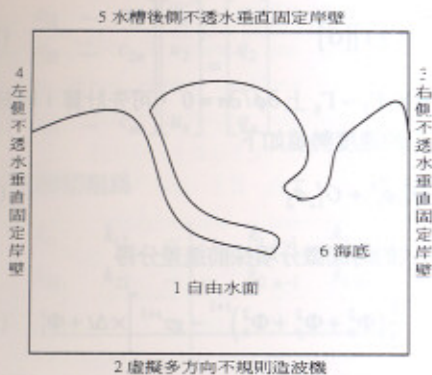


圖 1 定義圖

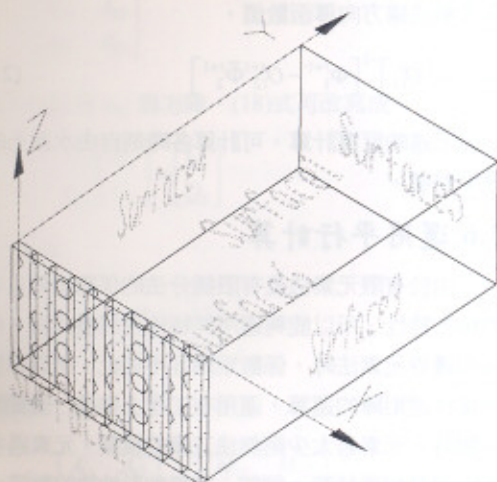


圖 2 空水槽示意圖

造波水槽內的流體假定為非壓縮性、非粘性、非旋性的理想流體，流體從靜止狀態開始運動，即造波水槽的流體運動具有滿足下列 Laplace 方程式的速度勢  $\Phi(x, y, z; t)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

根據 Green 定理，流體內任意一點的速度勢  $\Phi$  可由邊界上的速度勢及其在法線方向的導函數以下式積分方程式表示

$$\gamma \Phi + \int \Phi \bar{q}^* dA = \int \bar{\Phi} q^* dA \quad (2)$$

其中

$$q^* = 1/4\pi r \quad , \quad \bar{q}^* = \partial q^* / \partial n$$

$r$  為流體內任意一點與邊界上任意一點間的距離， $n$

表示向外法線。對內任意一點領域  $\gamma=1$ ，對平滑的邊界，當任意一點接近邊界上時， $\gamma=0.5$ 。

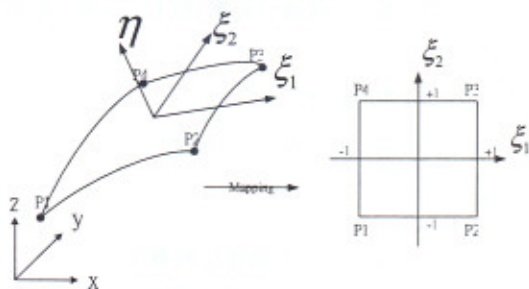


圖 3 無次度座標轉換示意圖

## 2.2 積分方程式的離散化

由於邊界由上述六個不同的邊界組成，故將上式改寫成

$$\gamma \Phi + \sum_{p=1}^6 \int_{\Gamma_p} \Phi \bar{q}^* dA = \sum_{p=1}^6 \int_{\Gamma_p} \bar{\Phi} q^* dA \quad (3)$$

本研究採用平面一次元素，由  $x-y-z$  轉換為  $\xi_1 - \xi_2 - \eta$  的無次度座標系統，如圖 3 所示，形狀函數為

$$\begin{cases} N_1 = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)/4 \\ N_2 = (1 + \xi_1)(1 - \xi_2)/4 \\ N_3 = (1 + \xi_1)(1 + \xi_2)/4 \\ N_4 = (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)/4 \end{cases} \quad (4)$$

對各邊界面以  $N_p$  ( $p=1 \sim 6$ ) 個節點組成的平面一次元素加以離散，並可得

$$\Phi_i + \sum_{p=1}^6 \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^4 h_{ij}^s \Phi_j = \sum_{p=1}^6 \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^4 g_{ij}^s \bar{\Phi}_j \quad (5)$$

式中

$$h_{ij}^s = -\frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_s \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{ij}} d\xi_1 d\xi_2 \quad (s=1 \sim 4) \quad (6)$$

$$g_{ij}^s = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_s \frac{1}{r} \Big|_{\Gamma_{ij}} d\xi_1 d\xi_2 \quad (s=1 \sim 4) \quad (7)$$

## 2.3 數值積分

### 2.3.1 常點積分

當  $i \neq j$  時，本文採用 Gauss 積分進行數值積分

$$h_{ij}^s = -\frac{1}{8\pi} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n w_l w_m N_s \frac{1}{r_{ilm}^2} \frac{\partial r_{ilm}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{ij}} \quad (s=1 \sim 4) \quad (8)$$

$$g_{ij}^s = \frac{1}{8\pi} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n w_l w_m N_s \frac{1}{r_{ilm}} |G|_{\Gamma_{ij}} \quad (s=1-4) \quad (9)$$

式中  $r_{ilm}$  為源點  $i$  至被積分元素  $j$  的 Gauss 積分點間的距離。

### 2.3.2 奇異點積分

當  $i=j$  時，由於  $\partial r / \partial n = 0$  得

$$h_{ij}^s = 0 \quad (s=1-4) \quad (10)$$

對(9)式，當  $i=j$  時會產生特異值，所以必須加以處理。如圖 4 所示，對某一被積分元素，其節點為  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  及  $P_4$ ，若討論節點為  $P_1$  時，先將四邊形元素分割成兩個三角形元素  $\Delta P_1 P_2 P_3$  與  $\Delta P_1 P_3 P_4$ ，再將其保角變換成正方形元素。

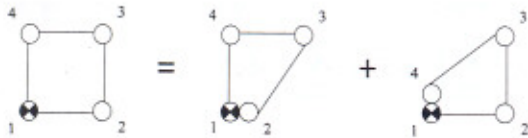


圖 4 奇異積分處理示意圖

## 2.4 邊界條件

在自由水面上，依 Lagrangian 的觀點描述動力學及運動學條件得

$$u = \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (11)$$

$$v = \frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (12)$$

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (13)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) - gz \quad (14)$$

在造波板上，水粒子的流速與造波板的移動速度

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -U(j) \quad (15)$$

在左右兩側、後壁及固定海底假定不透水

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (16)$$

## 2.5 聯立方程式

將(5)式以下列矩陣形式表示

$$[\Phi_i] = [O_{ij}] [\bar{\Phi}_j] \quad (i,j=1-6) \quad (17)$$

其中

$$[O] = [H + I][G] \quad (18)$$

由於邊界  $\Gamma_3 \sim \Gamma_6$  上  $\partial \phi / \partial n = 0$ ，可先計算  $t$  時刻邊界  $\Gamma_1$  上的速度勢值如下

$$\phi_i' = O_{i1}' \bar{\phi}_1' + O_{i2}' \bar{\phi}_2' \quad (19)$$

對(14)式的時間微分項採前進差分得

$$\Phi_i^{t+1} = \left[ \frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)^{t+1} - gz^{t+1} \right] \times \Delta t + \Phi_i' \quad (20)$$

由上式可計算  $(t+1)$  時刻自由水面  $\Gamma_1$  上的速度勢值，再由下式可計算出  $(t+1)$  時刻自由水面  $\Gamma_1$  上的速度勢法線方向導函數值。

$$\bar{\Phi}_i^{t+1} = [O_{i1}']^{-1} [\Phi_i^{t+1} - O_{i2}^{t+1} \bar{\Phi}_2^{t+1}] \quad (21)$$

經過上述的反覆計算，可計算各時刻自由水面上的速度勢值。

## 2.6 運用平行計算

由於有限元素法及有限插分法的係數矩陣具有對稱的特性，所以能夠運用其特性使用疊代法，但採用邊界元素法時，係數矩陣並不如此，所以必須直接作逆矩陣的運算，運用在工程上描述一個實際問題時，元素若太少則無法正確的模擬，元素過多時則運算相當耗時，例如：在無地形地物的數值水槽，尺寸為  $40 \times 20 \times 0.5$  (長  $\times$  寬  $\times$  深)，自由水面的節點數為  $201 \times 101$ ，再加上其他五面的節點數，大約為 20301 個，計算時為  $20301 \times 20301$  之超大型矩陣，再加上其他的邊界條件，預計店數大概需要 40000 點，也就是必須處理  $40000 \times 40000$  之超大型矩陣，要處理這個矩陣相當的耗時，一般個人電腦或工作站是無法處理的，這是邊界元素法在工程運用上所遇到的瓶頸之一。

本計畫是藉由叢集電腦(平行電腦, PC Cluster) 來解決這個問題，採取分工的做法，提高運算速度，效果令人滿意。本研究透過四部主機組成平行電腦做大型矩陣的運算，將逆矩陣分割成十六個  $(4 \times 4)$  子矩陣，透過四部主機同步計算以縮短計算時間及解決矩陣過大的問題。

本研究是透過逆矩陣的分割來達成，假設有  $n$  個聯立方程式，使用逆矩陣的運算，如

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

進行矩陣切割為

$$A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & \dots & k_{1\ n-1} & k_{1\ n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & \dots & k_{2\ n-1} & k_{2\ n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n-1\ 1} & k_{n-1\ 2} & \dots & \dots & k_{n-1\ n-1} & k_{n-1\ n} \\ k_{n\ 1} & k_{n\ 2} & \dots & \dots & k_{n\ n-1} & k_{n\ n} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中  $A_{11}$  及  $A_{22}$  為方陣，(18)式可改寫成

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

並解得

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \quad (27)$$

假設  $\det(A_{11}) \neq 0$ ，所以  $A_{11}$  可逆，則可解得

$$\begin{cases} M_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ M_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ M_{21} = -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ M_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{cases} \quad (28)$$

若  $\det(A_{22}) \neq 0$ ，所以  $A_{22}$  可逆，則可解得

$$\begin{cases} M_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \\ M_{12} = -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ M_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \\ M_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{cases} \quad (29)$$

當  $A_{11}$  及  $A_{22}$  同時可逆時，則

$$\begin{cases} M_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \\ M_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ M_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \\ M_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{cases} \quad (30)$$

令

$$\begin{cases} C_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \\ C_2 = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{cases} \quad (31)$$

則

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}C_2^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}C_1^{-1} & C_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中平行計算在處理逆矩陣的部分就是利用(31)式，也就是(30)式的部分，乍看之下(30)式與(28)式、(29)式差異不大，由於(25)式與(26)式的計算順序分別為  $M_{11} \rightarrow M_{12} \rightarrow M_{21} \rightarrow M_{22}$  以及  $M_{22} \rightarrow M_{12} \rightarrow M_{21} \rightarrow M_{11}$ ，故只能單機執行，而(30)式則可以分成兩個程序  $M_{22} \rightarrow M_{12}$  及  $M_{11} \rightarrow M_{21}$  同時進行，也就可利用兩部電腦來同時計算。同理，再將(31)式中的  $C_1^{-1}$  與  $C_2^{-1}$  也用同樣的方法分別利用兩部電腦執行，這樣就同時使用的四部電腦在計算。

### 三、結果與討論

本研究利用邊界元素法進行解析，各邊界以  $N_i (i=1 \sim 6)$  個節點加以分割，全部領域內可表示  $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$ ，由於欲觀察自由水面的變化情形，所以在該面配置較多的節點，其中  $N_1 = 1701$ 、 $N_2 = 63$ 、 $N_3 = 243$ 、 $N_4 = 243$ 、 $N_5 = 63$ 、 $N_6 = 231$ ，水槽條件為  $40 \times 5 \times 1$  (長寬深)，造波條件為  $\sigma^2 h / g = 0.5$ ，時間差分間隔為  $\Delta t = T / 200$ 。圖 5 及圖 6 分別為造波時間為三個與六個週期時，自由水面的情形。

接下來的工作則預定先完成規則波、孤立波、短峰波的數值造波及驗證數值解的正確性，進而再推展到多方向不規則波造波程式的撰寫及驗證，最後利用將港池模型或離岸結構物配置於數值水槽中，並配合水工模型試驗來驗證此數值模式。

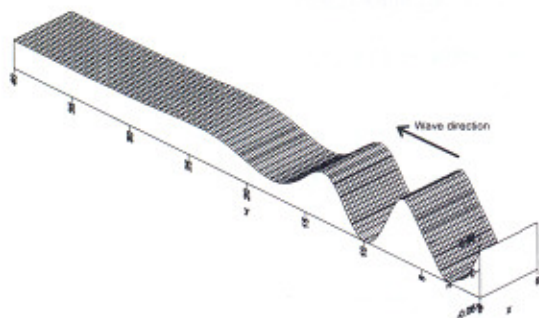


圖 5 為造波時間為三個週期時，自由水面的情形。

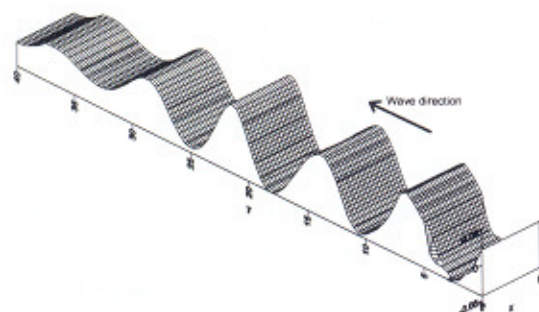


圖 6 為造波時間為六個週期時，自由水面的情形。

#### 四、結論

於規則波、孤立波、短峰波的數值造波及驗證後，進而再推展到單方向及多方向不規則波造波程式的撰寫及驗證，以及將平行計算推展到八節點，也就是八台電腦同時計算，增加速度及點數，朝向解  $40000 \times 40000$  之超大型矩陣邁進，最後利用將港池模型或離岸結構物配置於數值水槽中，並配合水工模型試驗來驗證此數值模式，並且搭配動畫軟體將數值計算結果可視化。

#### 謝誌

本研究承國科會專題研究計畫「三維數值造波水槽開發研究(II)」(NSC93-2611-E-019-012)補助，僅致感謝之意。

#### 參考文獻

1. Boo, S. Y., Kim, C. H., and Kim, M. H., 1994, "A Numerical Wave Tank for Nonlinear Irregular Waves by 3D Higher Order BEM," Int. J.

- Offshore Polar Eng. 4, pp. 17-24.
2. Brorsen, M. and Larsen, J., 1987, "Source generation of nonlinear gravity waves with the boundary integral equation method," Coastal Engineering, Vol.11, No.4, pp.93-113.
3. Chou, C.R., Shih, R.S. and Yim, Z.J., 1996, "Two-dimensional wave-making problem," Eighteenth world conference on the boundary element method, Computational Mechanics Publications, pp.649-658.
4. Faltinsen, O., 1978, "A numerical nonlinear method of Sloshing in tanks with two-dimensional flow," Journal of ship research, Vol.22, No.3, pp.193-202.
5. Grilli, Stephan, T., Sylvia Vogelmann, and Philip Watts, 2002, "Development of a 3D numerical wave tank for modeling tsunami generation by underwater landslides," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.26, pp.301-313.
6. Kim, M. H., Niedzwecki, J. M., Roesset, J. M., Park, J. C., Hong, S. Y., and Tavassoli, A., 2001, "Fully Nonlinear Multidirectional Wave by 3-D Viscous Numerical Wave Tank," Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vol. 123, pp124-133
7. Sugino, R. and Tosaka, N., 1990, "Boundary element analysis of nonlinear water wave problems," Pacific Congress on Marine Science and Technology, pp.18-25.
8. Park, J. C., Kim, M. H., and Miyata, H., 1999, "Fully Nonlinear Free-Surface Simulations by a 3D Viscous Numerical Wave Tank," Int. J. Numer. Methods Fluids 29, pp. 685-703.
9. Ursell, F., Dean, R.G. and Yu, Y.S., 1959, "Forced Small-Amplitude Water Waves: A Comparison of Theory and Experiment," J. Fluid Mech., Vol.7, part 3, pp.33-52.
10. 岡村敬二、八坂 功(1987): "BEM と Lagrange 粒子法を併用した非線形水面孤立波の不等水深上の傳搬の陽解法", 境界要素法論文集, 第四卷, 境界要素法研究會, pp.233-238。
11. 大山 巧(1985): "境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析", 第 32 回海岸工學講演會論文集, 日本, pp.555-559。