

孤立波在斜坡上碎波特性和之數值模擬

周宗仁¹ 歐陽寬²

摘要

本文以邊界元素法模擬孤立波於緩坡度之行進、淺化與碎波，其計算例為相對入射波高 0.1 至 0.4，斜坡坡度為 1:10 至 1:25。當孤立波行經緩坡度時，臨界碎波條件被定義為：波峰之水粒子水平速度等於波速；若波峰之水粒子水平速度未能等於波速，但波形前緣已呈垂直狀時，亦被視為達臨界碎波條件。以此為臨界碎波判斷式所得之碎波指標將被提出並討論。此外，孤立波的波形變化及碎波時的流速分佈亦被提出。

Numerical Simulation for the Breaking of Solitary Waves on Slopes

Chung-Ren Chou Kwan Ouyang

ABSTRACT

The solitary waves with incident wave height 0.1 to 0.4 on various slopes 1:10 to 1:25 are simulated by boundary element method. The breaking criterion is defined when the ratio of horizontal velocity of water particle on wave crest equals unity. For the case which the ratio of horizontal velocity of water particle on crest can never achieve unity, it is also considered as a breaking criterion when the front face of wave profile becomes vertical. According to these breaking criteria, the breaking indices are discussed. Additionally, the deformation of solitary waves on slopes is presented and the distribution of fluid velocities at breaking is shown.

一、前言

當波浪由外海行進至海岸線附近時，由於淺化的效應導致波高變大、波形陡峭，最後因為波形不能維持而碎波。碎波時所釋放出的大量能量，常常導致海岸結構物的損害，因而碎波位置及碎波波高的估算在海岸工程設計上相當重要。對於孤立波的淺化和碎波之研究，就實驗而言，早期有 Ippen 和 Kulin (1954) 的探討。Street 和 Camfield (1966) 根據所得之實驗數據提出碎波型態的判斷式。Seaki 等人 (1971) 分別探討孤立波通過固定寬度及漸縮寬度水槽時的波形變化。Synolakis (1987) 利用近似法提出孤立波在斜坡上的潮上最大高度並和實驗結果

作比較。就數值模擬而言，Madsen 和 Mei (1969) 模擬孤立波通過緩坡度並行進至淺水區，討論其波形的變化。Nakayama (1983) 利用邊界元素法討論海嘯的傳遞過程及孤立波遇垂直壁的潮上。Kioka (1983) 使用混合式的 Eulerian-Lagrangian 數值技巧模擬出捲入波和溢出波的波形變化及流速分佈。Kim 等人 (1983) 探討單一孤立波或連續兩個孤立波的傳遞過程及潮上。Grilli 等人討論孤立波在各種坡度的碎波性質 (1994a, 1997) 及孤立波通過潛堤的波形變化 (1994b)。Chou (1996) 利用邊界元素法模擬孤立波通過斜坡的造波、傳遞和波形變化。

為了決定何時碎波，碎波判斷式一直為學者所感興趣。就波浪於等水深水域而言，Stokes (1883) 曾證明其波形之波頂內角角度不得小於 120° ，且被 Longuet-Higgins (1982) 再次證明。另一種形式的碎波判斷式為碎波波高水深比 $H_b' = H_b/h_b$ ，其中

1. 台灣海洋大學河海工程學系教授

2. 台灣海洋大學河海工程學系博士班研究生

H_b 為碎波波高、 h_b 為碎波時水深。例如： $H_b/h_b = 0.73$ (Boussinesq, 1842)、 $H_b/h_b = 0.78$ (McCown, 1894)、 $H_b/h_b = 0.83$ (Yamada, 1957) 和 $H_b/h_b = 0.75$ (Kishi, 1968)。就斜坡上的波浪而言，Camfield 和 Street (1969) 根據實驗數據提出一有關碎波波高之碎波判斷式。Dean 和 Dalrymple (1984) 以淺水波方程式推導出碎波位置。Grilli (1997) 模擬斜坡上孤立波的行進，並提出碎波型態判斷式及碎波指標。

為瞭解斜坡上孤立波的碎波性質，本文以邊界元素法模擬相對入射波高 $H_0/h = 0.1$ 至 0.4 於斜坡坡度 $s=1:10$ 至 $1:25$ 的淺化過程。本數值模式於自由水面採用完全非線性邊界條件，並使用雙節點數值技巧 (double-nodes) 處理各邊界角落 (corner problem)，所使用之元素為線性元素，淺化過程中的波形變化、碎波時的流速分佈和碎波指標將被討論。

二、理論分析

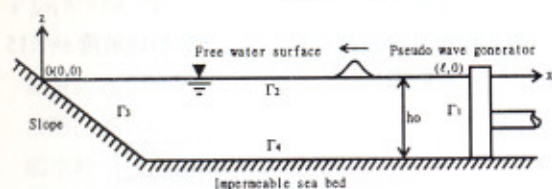


圖 1 數值水槽定義圖。

數值水槽如圖一所示，右邊界為一虛擬造波機邊界，上邊界為自由水面，左邊界與下邊界分別為不透水斜坡與海底床。在左邊界與自由水面的交界處定義為卡氏座標系之原點， x 軸以水平向右為正， z 軸以垂直向上為正，並假設虛擬造波邊界面在離原點相當遠的距離 $X=l$ 處。整個數值計算的領域乃是由虛擬造波邊界面 Γ_1 、自由水面 Γ_2 、不透水之斜坡 Γ_3 及海底床 Γ_4 所圍成之封閉區域。

2.1 控制方程式

對一無黏滯性、不可壓縮液體，並為非旋轉性運動流體 (irrotational motion)，應具有一速度勢 (velocity potential) $\Phi(x, z; t)$ 的存在，並且滿足 Laplace 方程式，即

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

2.2 積分方程式

根據 Green 第二定理，若速度勢滿足 Laplace 方程式，且其二次導函數存在，則領域內任意一點的速度勢 $\Phi(x, z; t)$ 可藉由邊界上的速度勢 $\Phi(\xi, \eta; t)$ 及其邊界上法線方向的一次導函數 $\partial\Phi(\xi, \eta; t)/\partial n$ 求得即：

$$\Phi(x, z; t) = \frac{1}{2\pi} \int_r \left[\frac{\partial\Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - \Phi(\xi, \eta; t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] ds$$

$$c = \begin{cases} 1 & \text{領域內} \\ 1/2 & \text{平滑邊界上} \\ 0 & \text{領域外} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $r = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - z)^2 \right]^{1/2}$ 。

2.3 邊界條件

將虛擬造波邊界面視為造波機之造波板，並令造波板之水平方向移動速度為 $U(t)$ 。對一活塞式造波機而言，造波板之水平移動速度和水粒子垂直於造波板上之速度必須一致，因此當虛擬造波板向左推動時，應有下列的關係式存在：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -U(t) \quad (3)$$

其中 n 為法線單位向量。對孤立波而言， $U(t)$ 可表示為

$$U(t) = H_0 \sqrt{\frac{g}{h}} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H_0}{4h^3}} C(t - t_c) \right] \quad (4)$$

其中 H_0 、 g 和 h 分別為入射波高、重力加速度及水深， $C = \sqrt{g(H+h)}$ 為波速， t_c 為特徵時間，等於造波板移動週期的一半。假設自由水面的大氣壓力為定值且等於零，則邊界條件為

$$\frac{D\Phi}{Dt} + g\eta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (5)$$

其中 D 為全微分、 η 為自由水面高度。對不透水斜坡與海底床，垂直於邊界面之速度應等於零。

2.4 數值方法

求解方程式(2)時，將欲解析領域之封閉邊界線 Γ 分成虛擬造波邊界面、自由水面、不透水之斜坡及等水深海底面四部份，各部份以不同的邊界

條件處理，各邊界線節點採用線型元素，並於各邊界角落使用雙節點數直技巧(周, 1988)處理。對於時間微分項，以前進差分法求得下一時刻之自由水面位置及速度勢。領域內任一點的水粒子速度可以下列式子求得：

$$u = \frac{\partial \Phi(x, z; t)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\xi - x}{r^2} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left[\frac{\partial x}{\partial n} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(\xi - x)^2}{r^4} \right) - \frac{\partial z}{\partial n} \left(\frac{2(\xi - x)(\eta - z)}{r^4} \right) \right] \right] d\Gamma \quad (6)$$

$$w = \frac{\partial \Phi(x, z; t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\eta - z}{r^2} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left[\frac{\partial z}{\partial n} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(\eta - z)^2}{r^4} \right) - \frac{\partial x}{\partial n} \left(\frac{2(\xi - x)(\eta - z)}{r^4} \right) \right] \right] d\Gamma \quad (7)$$

整個公式的詳細推導過程可參考周等人(1983, 1996)和石(1997)。

三、結果與討論

3.1 臨界碎波條件之探討

波浪的臨界碎波條件之探討，不論在波浪理論或海岸工程設計上都是非常重要的課題。有關波浪何時成為碎波，一般相信當水粒子水平速度等於或大於波速時，水粒子會躍出水面而形成碎波。Stokes (1883) 即以此假設為依據，提出一極限波形 (limiting wave profile)，即波頂波形內角的臨界條件為 120° 。就以波形作臨界碎波條件而言，Grilli (1997) 嘗以波前呈垂直狀時為其臨界碎波條件，此方法亦常被實驗者所使用。爾後亦有多位學者建議以相對碎波波高 H_b/h_0 作為碎波之臨界條件，其中 McCown (1894) 根據 Stokes 的極限波形角度求得 $H_b/h_0 = 0.78$ ，其值廣為海岸港灣書籍手冊所接受。因此，本文將分別就相對波高 $H/h = 0.78$ 、波頂內角呈 120° 、 $u/C = 1$ 及波前呈垂直狀等條件，分別討論何種臨界條件較適合於斜坡上行進之孤立波。

本文對斜坡坡度為 $s=1:10, 1:15, 1:20$ 及 $1:25$ 時孤立波的入射波高 $H_0/h_0 = 0.1, 0.2, 0.3$ 及 0.4 來進行分析，並以在斜坡坡度 $s=1:15$ 入射波高

$H_0/h_0 = 0.3$ 為例，以討論何種條件較為適合當作斜坡上孤立波的臨界碎波條件。圖 2 為孤立波從造波開始至計算結束間流體質量 (實線)、總能量 (線-點) 的時間歷程，其中總能量為動能及位能的和。圖中並將水粒子水平速度 (虛線)、及波速 (線-點) 表示出。當造波板從靜止 ($t=0$) 開始造波時，流體質量及總能量逐漸增加，並於 $t = 2t_c$ 後

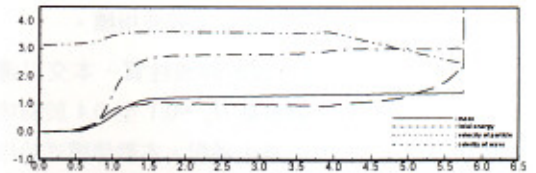


圖 2 流體質量、總能量、水粒子水平速度及波速時間歷程。

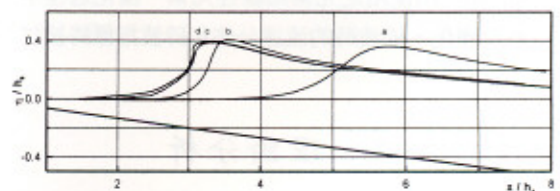


圖 3 相對入射波高 0.3 之孤立波於斜坡坡度 $s=1:15$ 之波形變化。

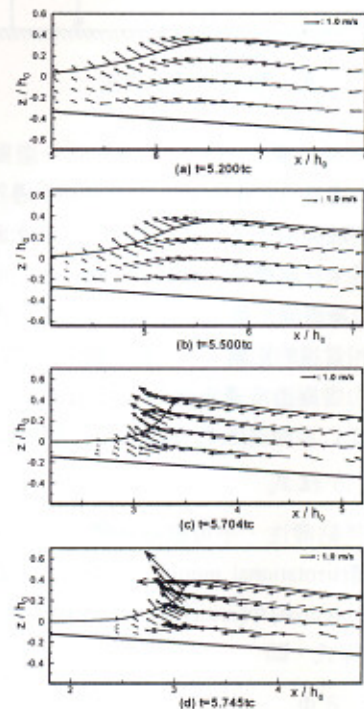


圖 4 相對入射波高 0.3 之孤立波於斜坡坡度 $s=1:15$ 之流速分佈。

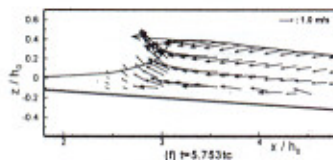


圖 4 (續) 相對入射波高 0.3 之孤立波於斜坡坡度 $s=1:15$ 之流速分佈。

呈穩定狀態。圖 3 為相同條件下孤立波從外海向岸邊行進時各時刻的波形圖，圖 4 為各時刻的流速分佈圖。

當 $t = 5.500t_c$ 時，此時之相對波高 H/h 達 0.78，此時刻之 $\theta = 165^\circ$ 、 $u/C = 0.53$ 。參考圖 2 可知其質量、總能量尚在守恆狀態。且由圖 3 可發現波形僅略微不對稱（標示為 a），由圖 4 可看出波前水粒子速度略有增大的趨勢。由此可知孤立波於斜坡上行進時，由 McCown (1894) 所提出的 $H_s/h_s = 0.78$ 並不適合作為臨界碎波條件。當 $t = 5.700t_c$ 時，波頂內角呈 120° ，此時 $u/C = 0.93$ 、 $H/h = 1.74$ 。由圖 2 可看出此時刻的流體質量、總能量尚在守恆狀態，由圖 3（標示為 b）可知此時波形已不對稱、波高變大，同時亦可由圖 4 看出波前水粒子速度更為增加。當 $t = 5.745t_c$ 時， u/C 達 1。此刻的 $\theta = 113^\circ$ 、 $H/h = 1.75$ 。圖 3（標示為 c）顯示此時刻波形之前緣更加陡峭，且由圖 4 可看出波前水粒子速度大量增加。當波頂附近水粒子的水平速度等於波速時，表示此刻的水粒子即將躍出水面而形成碎波，因此可作為臨界碎波條件。當 $t = 5.752t_c$ 時，波前波形呈垂直狀（圖 3 標示為 d），且此時刻相對應的 $\theta = 86^\circ$ 、 $u/C = 1.07$ 、 $H/h = 1.79$ 。此刻流體之質量、總能量雖亦處於守恆狀態，但可由圖 4 中發現到於波頂附近的水粒子速度呈不均勻狀態。在本文中的某些計算例，雖然波形前緣呈垂直狀、波浪已處於極不安定狀態，但水粒子速度仍未等於波速，例如斜坡坡度 1:15、入射波高 0.2 之孤立波。由上述現象可知，孤立波於斜坡上行進時應由 $u/C = 1$ 作為其碎波的臨界條件較為適宜，但對 u/C 雖未能達到 1 但波前呈垂直狀之計算例，本文亦視為已達臨界碎波。因此本文以上述的碎波臨界條件當作碎波判斷式，提出緩坡度上孤立波之碎波指標，並討論其波形變化及流速分佈。

3.2 碎波指標之探討

表 1 斜坡上孤立波之碎波指標

*: Grilli (1997)

SU: surge PL: plunge

slope		1:10							
H_0/h_0		0.1		0.2		0.3		0.4	
H_s/h_s		0.11		0.24		0.36	0.77*	0.43	0.77*
H_b/h_b		0.29		1.56		2.36	4.98*	1.42	3.94*
h_s/h_0		0.40		0.16		0.15	0.16*	0.30	0.19*
x_s/h_s		3.95		1.56		1.54	1.55*	3.02	1.94*
u/C		0.25		0.67		1.00		0.76	
θ		174°		144°		116°		83°	
type of breaker		SU	SU*	SU	SU*	PL	PL*	PL	PL*
slope		1:15							
H_0/h_0		0.1		0.2		0.3		0.4	
H_s/h_s		0.12		0.26	0.51*	0.39	0.53*	0.52	0.56*
H_b/h_b		0.87		1.58	3.61*	1.76	2.76*	1.77	2.35*
h_s/h_0		0.14		0.16	0.14*	0.22	0.19*	0.30	0.24*
x_s/h_s		2.13		2.45	2.09*	3.31	2.88*	4.43	3.60*
u/C		0.51		0.92		1.00		1.00	
θ		147°		87°		113°		108°	
type of breaker		SU	SU*	PL	PL*	PL	PL*	PL	PL*
slope		1:20							
H_0/h_0		0.1		0.2		0.3		0.4	
H_s/h_s		0.12	0.37*	0.27	0.41*	0.42	0.46*	0.51	0.51*
H_b/h_b		0.65	3.94*	1.22	2.51*	1.42	2.05*	1.29	1.82*
h_s/h_0		0.19	0.09*	0.22	0.16*	0.29	0.22*	0.40	0.28*
x_s/h_s		3.76	1.88*	4.48	3.24*	5.86	4.46*	7.95	5.59*
u/C		0.55		1.00		1.00		0.90	
θ		102°		132°		122°		83°	
type of breaker		SU	PL	PL	PL*	PL	PL*	PL	PL*
slope		1:25							
H_0/h_0		0.1		0.2		0.3		0.4	
H_s/h_s		0.18	0.31*	0.38	0.37*	0.49	0.43*	0.47	0.49*
H_b/h_b		1.67	2.89*	1.58	2.01*	1.44	1.72*	0.92	1.56*
h_s/h_0		0.11	0.11*	0.24	0.18*	0.34	0.25*	0.51	0.31*
x_s/h_s		2.67	2.65*	6.08	4.56*	8.45	6.26*	12.65	7.85*
u/C		1.00		1.00		1.00		1.00	
θ		147°		103°		106°		106°	
type of breaker		PL	PL	PL	PL*	PL	PL*	PL	PL*

根據上述之碎波判斷式，不同入射波高之孤立波於不同坡度的碎波指標如表 1 所示，由 Grilli (1997)所提出之碎波指標亦附於表 1。比較兩者結果，由表中可發現在坡度 $s=1:10$ 時，由 Grilli 所得之相對碎波波高 H_b/h_0 有過大的趨勢，就物理現象而言不甚合理。對相對入射波高大於 0.3、坡度小於 $s=1:20$ 之計算例而言，兩者所得之碎波波高 H_b/h_0 大致吻合；但 Grilli 所得之 H_b/h_0 較本文結果大。此外，由 Grilli 所得之碎波位置 x/h_0 亦較本文結果更為靠近海岸線。由於 Grilli 採用格子重新分配及高次積分的數值技巧，成功的模擬出捲入波水舌的形成。但仔細觀察 Grilli 所得結果，可發現在某些入射條件下其相對碎波波高似乎過大、碎波位置太靠近海岸線，尤其對斜坡坡度大、入射波高小者，更為明顯。

3.3 斜坡上孤立波之波形及流速變化

圖 5 為孤立波在斜坡坡度 $s=1:10$ 之波形變化。對相對入射波高 0.1 之孤立波而言，參考 Fig.5 (a)，波浪在行進至海岸線附近會產生緩波(bore)。當相對入射波高 0.2 之孤立波靠近海岸線時，如圖 Fig.5 (b)所示，波形前緣逐漸傾斜而形成碎波。圖 Fig.5 (c) 和 Fig.5 (d) 為相對入射波高 0.3、0.4 之波形變化，

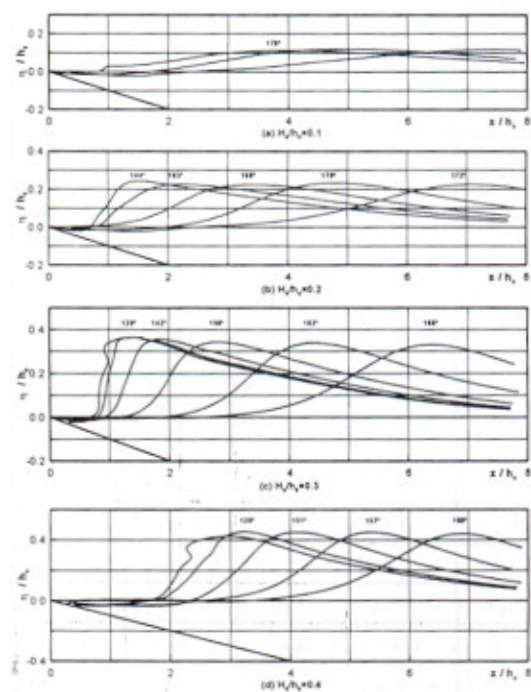


圖 5 孤立波於斜坡坡度 $s=1:10$ 之波形變化。

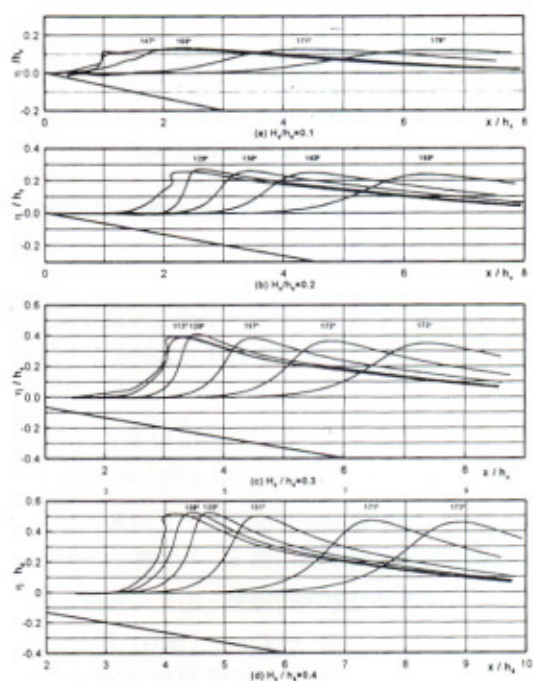


圖 6 孤立波於斜坡坡度 $s=1:15$ 之波形變化。

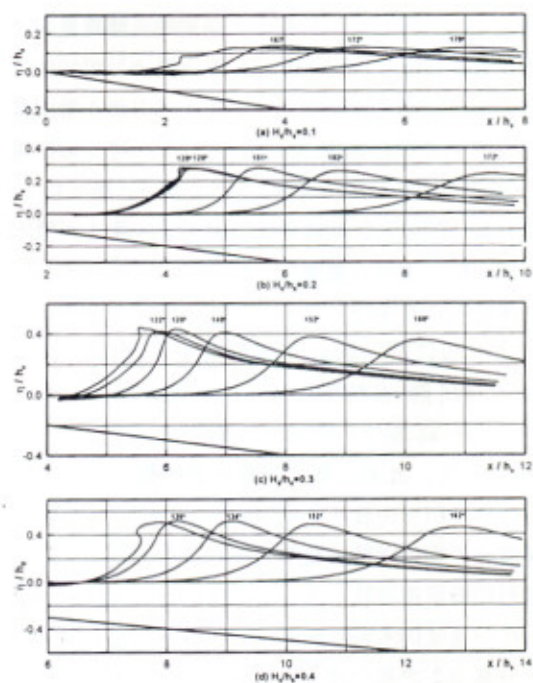


圖 7 孤立波於斜坡坡度 $s=1:20$ 之波形變化。

結果顯示波浪在靠近海岸線時形成捲入波。圖 6 至圖 8 各為斜坡坡度 $s=1:15$ 至 $1:25$ 的波形變化，其形成碎波之過程與圖 5 相似。

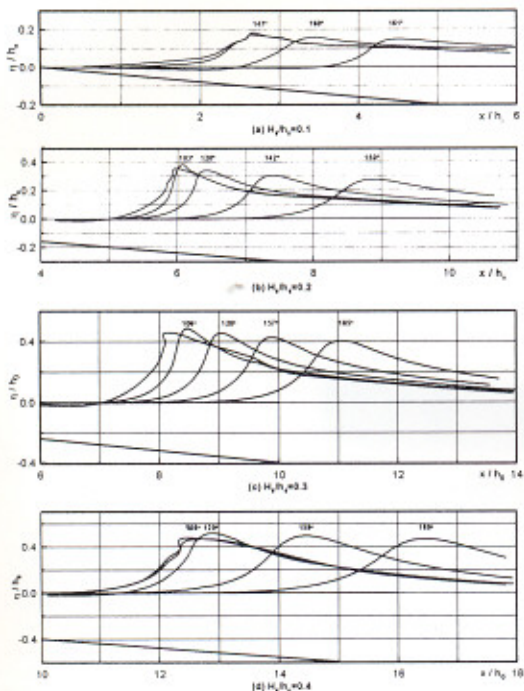


圖 8 孤立波於斜坡坡度 $s=1:25$ 之波形變化。

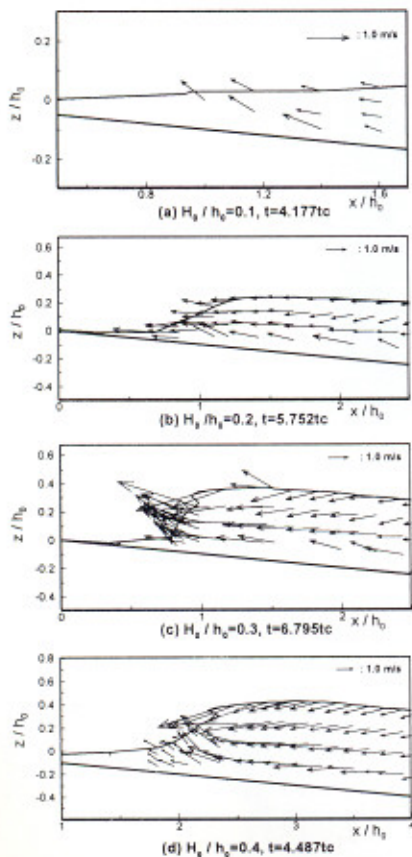


圖 9 孤立波於斜坡坡度 $s=1:20$ 之流速分佈。

為瞭解碎波時之流速分佈，以孤立波於斜坡坡度 $s=1:20$ 為例，將碎波時之流速分佈顯示於圖 9。由圖中可觀察到在碎波發生時，有甚大的水粒子速度出現於波形前緣靠近波峰處。

三、結論

本文以邊界元素法模擬入射波高為 0.1 至 0.4 之孤立波於斜坡坡度 1:10 至 1:25 的淺化過程。本文以 $u/C=1$ 作為其碎波的臨界條件；但對 u/C 雖未能達到 1 但波前呈垂直狀之計算例，亦視為已達臨界碎波。根據此碎波判斷式，孤立波在緩坡面上之碎波指標被提出，波浪從外海行進至海岸線的波形變化、碎波時的流速分佈亦被討論。就碎波形式而言，對入射波高 $H_0/h_0=0.1$ 、斜坡坡度為 1:10 至 1:20 及 $H_0/h_0=0.2$ 、斜坡坡度為 1:10 之孤立波而言，其碎波形式屬於洶湧，其餘皆屬於捲入波的形式。

參考文獻

1. 周宗仁(1983)“邊界元素法在波浪力學之應用”，台灣海洋學院河海工程學系。
2. 周宗仁、岳景雲和翁文凱(1988)“非線型波的數值計算”，第十屆海洋工程研討會論文集，617 頁-627 頁。
3. 石瑞祥(1997)“二維斷面數值造波水槽之研究”，台灣海洋學院河海工程學系博士論文。
4. Camfield, F. E. and R. L. Street (1969), "Shoaling of Solitary Waves on Small Slopes," *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, ASCE, Vol. 95, No. 1, pp.1-22.
5. Chou, C. R. and R. S. Shih (1996), "Generation and Deformation of Solitary Waves," *China Ocean Eng.*, Vol. 10, No. 4, pp.419-432.
6. Dean, R. G. and R. A. Dalrymple (1984), *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, Prentice-Hall, New Jersey, U.S.A..
7. Grilli, T. S., R. Subramanya (1994a), "Quasi-singular Integrals in the Modeling of Nonlinear Water Waves in Shallow Water," *Engrg. Anal. with Boundary Elements*, Vol. 6, No. 2, pp.97-107

- by Breakwater," *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 120, pp.74-92.
- 9.Grilli, S. T., I. A. Svendsen, and R. Subramaya(1997), "Breaking Criterion and Characteristics for Solitary Waves on Slopes," *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol. 123, No. 3, pp.120-112.
- 10.Kim, S. K., P. L-F. Liu and J. A. Liggett (1983), "Boundary Integral Equation Solutions for Solitary Wave Generation, Propagation and Run-up," *Coastal Engineering*, Vol. 7, pp.299-317.
- 11.Kioka, W. (1983), "Numerical Analysis of Breaking Waves in a Shallow Water," *Coastal Engineering in Japan*, Vol. 26, pp.11-18.
- 12.Longuet-Higgins, M. S. (1982), "Parametric Solution for Breaking Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 121, pp.403-424.
- 13.Madsen, O. S. And C. C. Mei (1969), "The Transformation of a Solitary Wave over an Uneven Bottom," *J. Fluid Mech.*, Vol. 39, part 4, pp.781-791.
- 14.Nakayama (1983), T., "Boundary Element Analysis of Nonlinear Water Wave Problems," *International J. for Numerical Method in Eng.*, Vol. 19, pp.953-970.
- 15.Otta, A. K., I. A. Svendsen and I. A. Grilli (1993), "The Breaking and Runup of Solitary Waves on Water," *Proc., 23rd Int. Conf. on Coast. Eng.*, Vol. 2, ASCE, New York, N. K., pp.1461-1474.
- 16.Seaki, H., S. Hanayasu, K. Ozaki and K. Takagi (1971), "The Shoaling and Run-up Height of the Solitary Wave," *Coastal Engineering in Japan*, Vol.14, pp.25-42.
- 17.Street, R. L. and F. E. Camfield (1966), "Observations and Experiments on Solitary Wave Deformation," *Proc. 10th Conf. Coastal Eng.*, pp.284-301.
- 18.Synolakis, C. E (1987), "The Runup of Solitary Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol. 185, pp.523-545.