

緩坡上孤立波變形之數值研究

周宗仁¹ 石瑞祥² 歐陽寬³ 王禮邦⁴

摘要

本文以邊界元素法建立一模擬非線性造波問題的數值模式，利用 Lagrangian 法描述流體的運動方式並配合時間差分的觀念，以虛擬的活塞式造波機模擬出孤立波經過緩坡度底床斜坡時，波浪的傳遞及碎波的可行性。為了能經濟且有效的模擬碎波波形，本文將自由水面元素採用不等分割。孤立波即將發生碎波時的位置及高度亦在本文中被討論，並配合流體質量、流體勢能與流體動能的探討以檢驗數值解的精確度。

Numerical Study of Solitary Wave on Mild Slope

Chou Chung-Ren Rucy-Syan Shih Kwan Ouyang Lii-Bang Wang

ABSTRACT

To assess the generation, propagation, deformation and breaking of the solitary wave on a mild slope, the numerical simulations of applying boundary element method to the wave making problem are developed in this paper. The numerical scheme in this paper is based on the Lagrangian description together with the time derivative. In this study, a wave generator of piston type is selected for simplicity. Arbitrary discretization on the free surface will be applied to simulate the deformation and breaking of the solitary wave on a mild slope.

1. 緒論

當波浪由外海向近岸推進時，在近岸區附近有種顯著的特徵就是波浪碎波的現象。碎波發生時所產生巨大的衝擊力會對於海岸線發生侵蝕，伴隨發生的沿岸流(longshore current)將產生沿岸漂沙致使地形改變。碎波波力對於海岸結構物的安定性亦有重大的影響，因而碎波位置及碎波波高的估算在海岸工程計畫及設計上關係重要。由於在海岸附近的水深極淺，實際波浪與孤立波的形狀頗為接近，故海岸工程應用問題中在解析碎波現象時，多以孤立波理論來解決實際問題。

早期學者研究孤立波碎波多從碎波臨界式著手，利用實驗觀察的方式提出孤立波碎波臨界式，如 Ippen & Kulin (1955)，Saeki & Kishi (1966)，

Camfield & Street (1969)。近期由於計算器的進步神速，因此數值造波水槽漸被開發研究，如 Nakayama & Washizu (1981)，Wataru (1983)。周等(1996)利用邊界元素法以 Lagrangian 法配合時間差分觀念以解析孤立波及週期波受任意海底地形影響之變形研究，亦探討潛堤對波浪的影響。本文乃藉由數值水槽的造波，採用以時變性的時間領域為前提下，使用 Lagrangian 法配合時間差分的觀念所建立的數值造波水槽，針對孤立波在緩坡度的海底底床影響下所產生的碎波現象，希望能模擬出波浪欲碎波時的波形變化。

2. 相關孤立波公式

由於碎波現象在水理學上頗複雜且不連續，因此至今尚未有明確的定義和理論公式。為了解析碎波時的現象，一般都以實驗的方式來探討，也因此目前有不同的碎波條件被設定，整理如下以供參考：(1) 在波峰處，表面水分子的水平流速等於或大於波速。(2) 在波峰處，前後波面的切線成 120

1. 海洋大學河海工程學系教授
2. 海洋大學河海工程學系畢業博士
3. 海洋大學河海工程學系碩士班研究生
4. 海洋大學河海工程學系碩士班研究生

度，在波峰產生尖點致使波頭呈不連續現象。(3) 波形呈顯著的非對稱性，波頭前面呈直立狀態。(4) 波峰與水底處水分子的速度相差過大，以至於波頭前進過度而破壞波的運動。(5) 有限振幅波的無限級數解產生發散的狀況。而本文中之數值模式乃採用(3),(4)項來判定碎波的發生。

由於理論上孤立波為波長無限長之波形，但是實際上並無此類波形，且無限長之波長在數值計算上亦無法模擬，所以一般定義含有無限長波長整體總質量 98% 之長度為孤立波之有效波長(effective wave length) L_{eff} ，本篇採用 Nakayama(1983)所導出的值：

$$L_{eff} = 9.5766h \sqrt{\frac{h}{\zeta_0}} \quad (2.1)$$

$$T_{eff} = \frac{L_{eff}}{\sqrt{g(1+\zeta/h)}} \quad (2.2)$$

其中 h 、 ζ_0 、 T_{eff} 分別代表一定水深，孤立波入射波高及孤立波有效週期。

3. 數值方法

3.1 基本假設

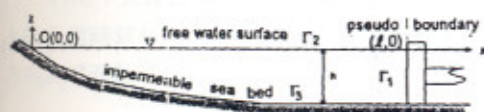


圖 1. 岸線斷面定義圖

參考圖 1.：假定 x - z 平面上有一海岸断面地形，其底床坡度與水面的交界處定義為卡氏座標系(Cartesian coordinate)之原點， x 軸以水平向右為正， z 軸以垂直向上為正，並在離岸線相當遠的距離 $x=l$ 處設一虛擬造波邊界面。整個數值計算的領域乃是由虛擬造波邊界面 Γ_1 、自由水面 Γ_2 、具坡度之固定不透水海底面 Γ_3 及等深之固定不透水海底面 Γ_4 所圍成之封閉區域。假設在領域內的流體為非黏性(inviscid)、不可壓縮(incompressible)之理想流體，當虛擬造波板所造出的波浪向海岸推進

時，則領域內的流體運動應具有一速度勢(velocity potential) $\Phi(x, z, t)$ 的存在，並且滿足 Laplace 連續方程式：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

在利用邊界元素法作解析時，位於兩不同邊界條件之邊界面交接處的角點問題(corner problem)向來是一研究重點。為使在角點處能滿足速度勢 Φ 的連續及唯一性，本數值方法以雙節點(double nodes)的方式處理角點問題。

3.2 邊界上之邊界條件

3.2.1 自由水面

在自由水面上若令大氣壓力恆為一定值並視為 0 時，則依其運動學邊界條件(kinematics boundary conditions)及動力學邊界條件(dynamics boundary conditions)可得：

$$u = \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.3)$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} + g\eta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.4)$$

上式中的 D 表示拉氏全微分(Lagrange differentiation)， g 為重力加速度， η 為自由水面波形。

3.2.2 固定不透水海底面

在坡度底床 Γ_3 及等深底床 Γ_4 邊界上，因不考慮其表面的黏滯性，所以流體運動在其法線方向的流速應為 0，可表示為：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (3.5)$$

其中 n 為法線方向之單位向量。

3.2.3 虛擬造波邊界

在 $X = l$ 處，將虛擬造波邊界面視為一可移動的造波機之造波板，並令其水平方向移動之水平速度為 $U(t)$ 。因此若將虛擬造波邊界面代入不同條件之 $U(t)$ 值，即可模擬各種造波機之造波情形，本文中僅對活塞推拉式造波機作探討。由於在虛擬造波邊界面上之水平速度 $U(t)$ 和水分子的水平流速必須連續，因此當虛擬造波板向左運動時，有下列的關係式成立：

$$\bar{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -U(t) \quad (3.6)$$

根據 Boussinesq(1872) 的理論，對一孤立波而言，虛擬造波邊界面之水平速度 $U(t)$ 可表示如下：

$$U(t) = x_0 \omega \operatorname{sech}^2[\omega(t - t_c)] \quad (3.7)$$

$$x_0 = h \sqrt{\frac{4\zeta_0}{3(h + \zeta_0)}} \quad (3.8)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\frac{3\zeta_0}{4h} \left(1 + \frac{\zeta_0}{h}\right)} \quad (3.9)$$

$$t_c = \frac{\pi}{\omega} \quad (3.10)$$

上式中的 x_0 為虛擬造波邊界面最大擺幅的一半 (semistroke)， t_c 為特徵時間， ω 為特徵角頻率， ζ_0 則為入射波振幅，由於孤立波是屬於單一波峰且波長為無限長的波形，因此相當於孤立波的入射波高。

3.3 積分方程式

3.3.1 基本方程式

依據 Green 第二定理 (Green's Second Identity)，領域內任意一點的速度勢 $\Phi(x, z, t)$ 可藉由邊界上的速度勢 $\Phi(\xi, \eta, t)$ 及其邊界上法線方向的一次導函數 $\partial\Phi(\xi, \eta, t)/\partial n$ 來決定，即解析領域內任意一點的速度勢可用下列積分方程式表示：

$$\Phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial\Phi(\xi, \eta, t)}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - \Phi(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] ds \quad (3.11)$$

$$\text{其中 } r = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}。$$

當領域內的任意點 (ξ', η') 相當接近於平滑的邊界面 (ξ, η) 時，其速度勢則可以由下列的積分方程式表示：

$$\alpha(\xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial\Phi(\xi, \eta, t)}{\partial n} \ln \frac{1}{R} - \Phi(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R} \right] ds \quad (3.12)$$

$$\text{其中 } R = \left[(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 \right]^{\frac{1}{2}}。$$

3.3.2 積分方程式的分離化

若將欲解析的領域之封閉邊界線 Γ 以線形元素 (linear element) 分成虛擬造波邊界面 Γ_1 、自由水面 Γ_2 、具坡度之固定不透水海底面 Γ_3 及等深之固定不透水海底面 Γ_4 四部份，各邊界線 Γ_i 以 $N_i (i=1 \sim 4)$ 各節點加以分割，全部節點數可以表示成 $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ 。若將每個元素以一次度線形元素做為分離化元素，並導入無次元座標系，則 (3.12) 式可以下列的矩陣形式表示：

$$[\Phi] = [O][\bar{\Phi}] \quad (3.13)$$

在上式中的 $[\Phi]$ ， $[\bar{\Phi}]$ 分別表示邊界上的速度勢及其導函數值， $[O]$ 表示為相對應的形狀函數。為方便代入各邊界條件，乃將第 (3.13) 式表示為：

$$[\Phi_i] = [O_{ij}][\bar{\Phi}_j] \quad i, j = 1 \sim 4 \quad (3.14)$$

以上式子之詳細推導過程可參考 Chou(1983)。

3.4 聯立方程式的建立

3.4.1 各邊界的初始條件

當起始造波時間 $t=0$ 時，各邊界上的初始值條件分別敘述如下：

(1) 虛擬造波邊界面 Γ_1

由於理論上考慮造波板水平方向的水平運動速度與流體分子流速必須具有連續性，因此當 $t=0$ 時可存有下列的關係式：

$$\bar{\Phi}_1^0 = \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial n} = -U(0) \quad (3.15)$$

上式的上標“0”表示初始模擬造波時間 $t=0$ 的時刻。

(2) 自由水面 Γ_2

假定自由水面在最開始時($t=0$)為完全靜止的液面速度勢為 0，表示成：

$$\Phi_2^0 = 0 \quad (3.16)$$

(3) 具坡度之固定不透水海底面 Γ_3 及等深之固定不透水海底面 Γ_4

當固定的海底底床假設為不透水邊界時，其邊界上的法線方向的流速在任何時刻均為 0，因此可以下式表示：

$$\bar{\Phi}_i^k = \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial n} = 0 \quad i = 3, 4 \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

3.4.2 物理量的差分

利用中央差分(central differences)於自由水面上的任意時刻 ($t = k\Delta t$) 時，各節點的速度勢在切線方向的導函數可以利用下式計算：

$$\left(\frac{\partial \Phi_{2,j}^k}{\partial s} \right) = \left(\frac{\Delta s_{j-1}^k}{\Delta s_j^k} \right) \frac{\Phi_{2,j+1}^k}{s'} + \left(\frac{\Delta s_j^k - \Delta s_{j-1}^k}{\Delta s_j^k} \right) \frac{\Phi_{2,j}^k}{s'} - \left(\frac{\Delta s_j^k}{\Delta s_{j-1}^k} \right) \frac{\Phi_{2,j-1}^k}{s'} \quad (3.18)$$

其中：

$$\Delta s_j^k = \sqrt{(x_{j+1}^k - x_j^k)^2 + (z_{j+1}^k - z_j^k)^2}$$

$$s' = \Delta s_j^k + \Delta s_{j-1}^k$$

$$s'' = \Delta s_j^k - \Delta s_{j-1}^k$$

在自由水面上，速度勢分別在法線方向及在切線方向的導函數與其在 x, z 軸方向的分量之間具有下列的關係式存在：

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial n} \sin \beta - \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial s} \cos \beta \\ \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial n} \cos \beta - \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial s} \sin \beta \end{cases} \quad (3.19)$$

其中 β 表示為自由水面波形的表面切線與 x 軸方向的水平線之間的夾角。

令自由水面上任一點(x, z)在時間 $t = k\Delta t$ 時刻的位置為 (x^k, z^k) ，對(3.2)式和(3.3)式作前進差分(forward-difference)，將可得到 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻的位置 (x^{k+1}, z^{k+1}) ：

$$x^{k+1} = x^k + \left(\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial x} \right) \Delta t \quad (3.20)$$

$$z^{k+1} = z^k + \left(\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial z} \right) \Delta t \quad (3.21)$$

將(3.19)式的關係式代入(3.4)式所表示的動力學邊界條件，並對時間作前進差分，可以得到 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻的速度勢 Φ_2^{k+1} ，表示為：

$$\Phi_2^{k+1} = \Phi_2^k + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial n} \right)^2 \right] \Delta t - g z^{k+1} \Delta t \quad (3.22)$$

再利用(3.5)式、(3.6)式及上式代入(3.14)式中，將可得到 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻各邊界面的相關物理量，以矩陣形式表示如下：

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -O_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -O_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -O_{32} & 1 & 0 \\ 0 & -O_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O_{11} & 0 & O_{13} & O_{14} \\ O_{21} & -1 & O_{23} & O_{24} \\ O_{31} & 0 & O_{33} & O_{34} \\ O_{41} & 0 & O_{43} & O_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \Phi_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

其中“T”為單位矩陣。

3.4.3 時間反覆計算流程

數值水槽解析的流程敘述如下：

1. 在起始時刻 $t = k\Delta t$ ($k = 0$)，經由(3.15)式-(3.17)式可以得知其已知條件分別為虛擬造波邊界面的速度勢之法線方向的導函數 $\bar{\Phi}_1$ 、自由水面的速度勢 Φ_2^k 及各固定不透水邊界面的法線方向之導函數 $\bar{\Phi}_3^k$ 、 $\bar{\Phi}_4^k$ ，將各已知條件代入(3.14)式中解聯立方程式將可得到虛擬造波邊界面之速度勢 Φ_1^k 、自由水面的法線方向之導函數 $\bar{\Phi}_2^k$ 及固定不透水面的速度勢 Φ_3^k 及 Φ_4^k 。
2. 在自由水面上，由已知的速度勢 Φ_2^k 以(3.18)式計算以求得其切線方向的導函數。
3. 利用自由水面的 $\partial\Phi_2^k/\partial n$ 和 $\partial\Phi_2^k/\partial s$ 依照(3.19)式的關係將可求得 $\partial\Phi_2^k/\partial x$ 和 $\partial\Phi_2^k/\partial z$ 。由(3.20)式及(3.21)式可求得 $t = (k+1)\Delta t$ 時各節點的位置 (x^{k+1}, z^{k+1}) ，作為解析在 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻自由水面的新位置。
4. 當 $t = (k+1)\Delta t$ 時，自由水面的速度勢 Φ_2^{k+1} 可以由(3.22)式以 $t = k\Delta t$ 時刻的速度勢 Φ_2^k 、法線方向的導函數 $\partial\Phi_2^k/\partial n$ 及切線方向的導函數 $\partial\Phi_2^k/\partial s$ ，配合上述的步驟 3. 之自由水面位置 (x^{k+1}, z^{k+1}) 求得。
5. $t = (k+1)\Delta t$ 時刻的各已知物理量及水面波形等等，利用(3.14)式重新求解係數矩陣的值 $[O]$ ，以便進行下一時刻的計算。
6. 在進行 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻的解析時，領域的各邊界面所代表的值乃是經由步驟 5. 所求得的自由水面新位置、移動後的虛擬造波邊界面及不透水的固定海底邊界面所圍成的封閉領域，並將所求得的 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻自由水面之速度勢 Φ_2^{k+1} ，加上經由(3.5)式及(3.6)式所分別求得的在 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻虛擬造波邊界面與各不透水邊界面的法線方向之速度，代

入(3.23)式解聯立方程式，將可求得在 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻垂直於自由水面之法線方向導函數 $\bar{\Phi}_2^{k+1}$ 及虛擬造波邊界面與各不透水邊界面的速度勢。

7. 由步驟 2. 起經由計算器的反覆運算將可求得自由水面各點 (x, z) 的位置變化，此為自由水面波形的歷時(time histories)變化。

4. 數值結果

4.1 條件之設定

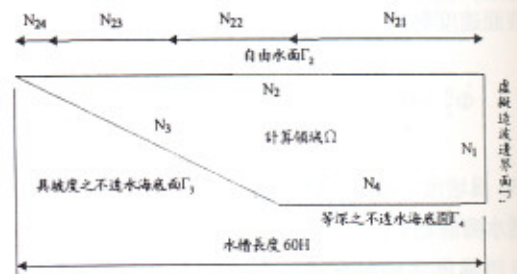


圖 2. 數值水槽定義圖

圖 2. 乃數值水槽定義圖。為了更能描述出波浪碎波時的波形，乃將自由水面的元素作不等間距的分割。本文利用理論公式及本數值模式多次測試之經驗，以作為判斷孤立波經過海底斜坡時可能發生碎波時的碎波位置，並在其位置附近增加節點數，藉以模擬出更實際的碎波波形。本文將自由水面的元素由右向左分割成四個部份。第一部分從虛擬造波邊界面起向左邊以等間距分割成 30 個元素，節點間距各為一倍水深，此部份總長度為 30 倍水深，以 $\Gamma_{21} = 30h$ 表示；第二部份接續第一部份在再向左分割成 16 個元素，節點間距由 1 倍水深以等差級數漸減至 0.25 倍水深，此部份總長度為 10 倍水深，以 $\Gamma_{22} = 10h$ 表示；第三部份接續第二部份向左分割成 64 個元素，節點間距則各為 0.2 倍水深，此部份總長度為 12.8 倍水深，以 $\Gamma_{23} = 12.8h$ 表示；第四部份接續第三部份向左分割成 8 個元素，節點間距由 0.3 倍水以等差級數漸增至 1 倍水深，此部份總長度為 5.2 倍水深，以 $\Gamma_{24} = 5.2h$ 表示；第五部份接續第四部份向左分割成 2 個元素，節點間距各為一倍水深，此部份總長度為 2 倍水深，以 $\Gamma_{25} = 2h$ 表示。如以上所述，自

由水面共被分割成 120 個元素 ($\Gamma_2 = \Gamma_{21} + \Gamma_{22} + \Gamma_{23} + \Gamma_{24} + \Gamma_{25}$)。具坡度之不透水海底面以 1:30 的坡度由左向右下降，總長為 30h，以等間距分割成 30 個元素，以 $\Gamma_3 = 30h$ 表示。等水深之不透水海底面總長為 30h，以等間距分割成 30 個元素，以 $\Gamma_4 = 30h$ 表示。

4.2 數值計算結果

本文除了將上述的各種條件做數值運算外，為了確定數值計算的精確性，也計算流體質量(mass of fluid)、流體勢能(potential energy of fluid)及流體動能(kinetic energy of fluid)的數值解，其數值解和理論解做比較，藉以確定本數值模式的精確性。

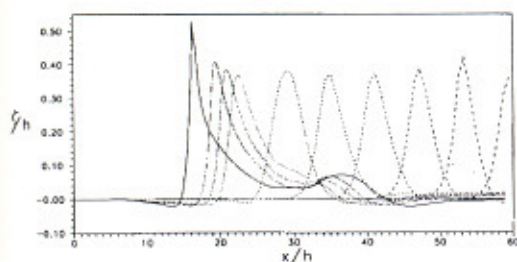


圖 3. 孤立波淺化及碎波

圖 3. 為十個不同時間分別為 $t = 200\Delta t$ ， $t = 400\Delta t$ ， $t = 600\Delta t$ ， $t = 800\Delta t$ ， $t = 1000\Delta t$ ， $t = 1800\Delta t$ ， $t = 2600\Delta t$ ， $t = 2800\Delta t$ ， $t = 3000\Delta t$ ， $t = 3424\Delta t$ ，其中 $t = 200\Delta t$ 至 $t = 1000\Delta t$ 時， $\Delta t = t_c/200$ ， $t = 1800\Delta t$ 至 $t = 3424\Delta t$ 時， $\Delta t = t_c/800$ 。當入射波浪由右向左經海底斜坡向海岸傳遞時，由於水深的改變導致於波浪產生淺化效應，使得波形漸改變呈現不對稱性，最後形成捲入波(plunging breaker)而碎波。

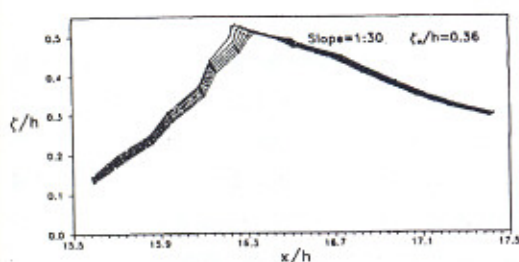


圖 4. 孤立波碎波隨時間變化之演變圖

圖 4. 表示波浪即將發生碎波時，在不同時間

下的波形變化，其中波形由右至左的時間分別為 $t = 3414\Delta t$ ， $t = 3416\Delta t$ ， $t = 3418\Delta t$ ， $t = 3420\Delta t$ ， $t = 3422\Delta t$ ， $t = 3424\Delta t$ 。由圖中可看出波峰處水粒子的運動位置隨著時間的演變而有溢出波峰的趨勢，由於波峰水粒子的運動速度較整個波速為快，因此波頭前面呈直立狀態後整個波形有前傾狀況的發生，最後形成碎波。

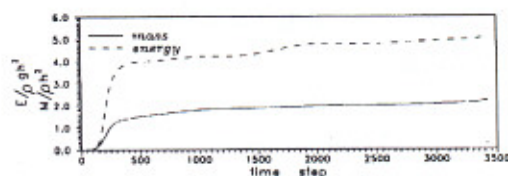


圖 5. 孤立波質量與總能量檢測圖

圖 5. 說明本數值計算在流體質量方面及流體能量方面與理論值的差異，藉以確定本數值計算模式的精確性。由圖中可看出當波浪隨著時間的增加而向海岸前進時，在質量及能量上有漸漸增加的趨勢，其原因乃是波浪遇到斜坡底床所產生的反射浪，將使能量有略增的結果，而質量及能量的理論公式基本上乃假設孤立波在一定水深底床下的運動，不考慮在具有斜坡底床狀況下所產生的影響，也因此數值解與理論解有些微的不同。但是整體而言，本數值結果與理論值有相同的趨勢。

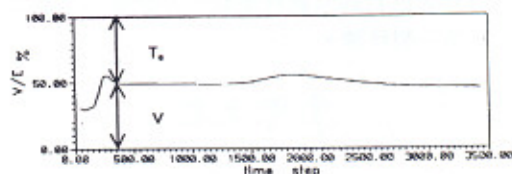


圖 6. 孤立波動能與位能關係圖

圖 6. 為數值解析過程中動能與位能的關係圖，當虛擬造波機開始造波時 $t = 0$ ，由於定義靜水位的位能為零，因此，在此時刻的能量全部屬於動能，隨著時間的增加波浪在傳遞過程中動能與位能大約各佔 50%，亦即總能量為動能或是位能的 2 倍。圖中顯示出在初始造波階段，由於波浪未完全成熟，動能和位能交替尚未達穩定狀態，因而在前 350 個 time step 其位能與總能量的百分比有跳動的結果，隨後即達成穩定狀態。當波浪碎波時，能量將不再守恆，導致數值解析解與理論解誤差變大，

數值計算上呈現發散的結果。

5. 結論

本文應用邊界元素法所建立的數值水槽，在自由水面的流體運動以 Lagrangian 法作描述並配合時間差分的觀念，將自由水面元素作不等間距分割的情況下，用以計算緩坡度斜坡面上孤立波碎波波形的變化，進而推算出碎波波高，碎波水深及碎波點的位置。

依據本文之研究，可得到下列之結論：

1. 水分子運動軌跡以 Lagrangian 法與時間差分的方法求得水粒子在不同時刻的位置。
2. 碎波發生之前，波峰處的水粒子移動速度大於波峰前緣處的水粒子速度，使得波形呈前傾的現象，此作用持續到碎波發生為止，數值結果與理論吻合。
3. 孤立波在自由水面上由於只有單一波峰，因此在造波板停止運動，能量達穩定狀態時，其動能和位能大約各佔總能量的 50%，與理論所求的值吻合。
4. 自由水面元素以不等間距分割時，節點間距 Δs 和時間差分間距 Δt ，對於數值計算上有決定性的影響。
5. 若能進一步計算出解析領域內的速度場分佈，將有助於對孤立波碎波變化的瞭解，這是本文的下一個目標。

參考文獻

1. 石瑞祥(1997)"二維斷面數值造波水槽之研究"，博士論文，國立臺灣海洋大學河海工程研究所
2. 周宗仁(1983)"邊界元素法在波浪力學之研究"，國立臺灣海洋大學河海工程學系
3. Camfield, F. E., and R. L., Street(1969)"Shoaling of Solitary Waves on Slope", *Proc. ASCE, J.W. and H. Div.*, 95,ww1,pp. 1-22
4. Ippen, A. T., and G. Kulin(1955)"The shoaling and breaking of solitary wave", *Proc. 5th, Conf. on Coastal Eng.*, Berkeley, Calif., pp. 27-49
5. Kioka Wataru(1983)"Numerical analysis of breaking

waves in a shallow water", *Coastal Engineering In Japan*, Vol. 26, pp. 11-18

6. Nakayama, T.(1981)"Boundary element analysis of nonlinear water wave problems", *International Journal for Numerical Method In Engineering*, Vol. 17, pp. 1631-1646
7. Saeki, H., and T.; Kishi(1966)"The shoaling, breaking and runup of the solitary wave on impermeable rough slopes", *Proc. 10th Conf. on Coastal Eng.*, Tokyo, Japan, pp. 322-348