

## 波浪作用於結構物之研究 (理論值與實驗值之比較)

周宗仁\*  
葉榮椿\*\*

### 摘 要

本文係討論在一定水深海域中，複數個任意斷面形狀之不透水直立柱狀體作任意排列時，應用 Green 函數及微變法 (Perturbation Method) 理論解析在考慮有限振幅波作用時，因結構物存在所引起之波散亂 (Scattering) 問題及作用於結構物之波壓力，並以實驗驗證之。

實驗部份係在平面造波水槽中進行，以波壓計測定在不同位置所受波壓力值；並將實驗值和理論計算值加以比較可發現實驗值與理論值相吻合。

### 一、前言

在海岸及港灣工程之波力設計時，由於微小振幅波理論所得到之結果有偏小之趨勢，故為配合工程設計上之需要，必須將微小振幅波理論推展至有限振幅波理論，亦即考慮波浪之有限振幅性。

關於此方面之研究至目前為止有 Yamaguchi 和 Tsuchiya, Raman 和 VenKatanarasiah 曾分別利用微變法考慮非線性自由表面邊界條件時，解析至第 2 近似解；ChaKrabarti 亦曾解析至第 2 及第 5 近似解。但上述各種解析法均僅能適用於波浪作用於圓形斷面之柱狀體，對其他斷面或任意斷面之結構物則無法適用。作者之一 (1979)<sup>(1)</sup> 亦曾應用 Green 函數解析有限振幅波邊界值問題；在本文中將說明應用此原理對於任意斷面形狀之複數個柱狀體群，在考慮有限振幅波時之理論解析。

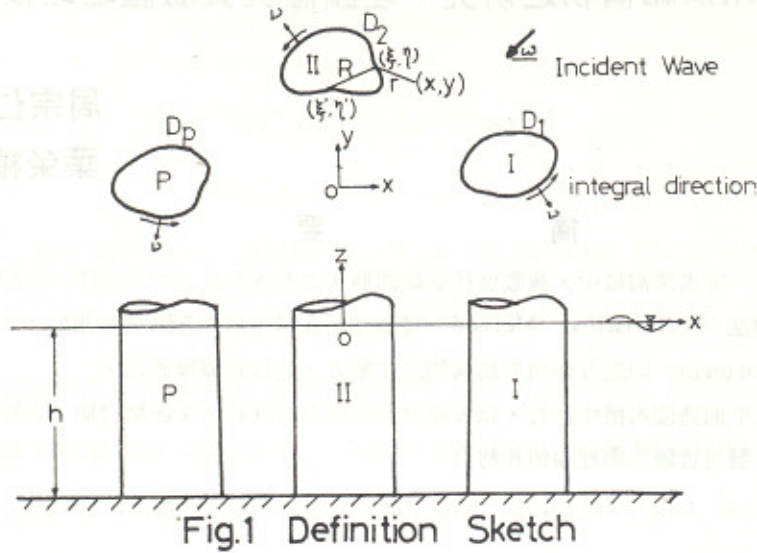
本文將說明在一定水深之海域，複數個不透水直立之任意斷面形狀結構物作任意排列時，將流體領域之速度勢、水面波形、週頻率等物理量，利用微變法對波形尖銳度作無限級數展開後取至第 2 項再應用 Green 函數可非常簡單地分別求得第 1 及第 2 近似解之波壓力。文中並以實驗對單一橢圓體測定其上不同位置之波壓力值以印證之；將實驗值和理論計算值加以比較可發現實驗值和第 2 近似解理論值相吻合。

本文之主要目的在於說明理論與實驗結果之比較，故對理論解析部份只將與實驗結果有關之公式列出，詳細請參照文獻。

\* 工學博士，國立台灣海洋學院河海工程學系副教授

\*\* 工學碩士，國立台灣海洋學院河海工程學系研究助理

二、理論解析



如 Fig. 1 所示，在一定水深之海域中複數個（ $P$  個）任意斷面形狀之直立柱狀體存在；在靜水面上取座標原點  $O$ ，水平面內取  $x$ 、 $y$  軸，垂直向上取  $z$  軸；各柱狀體之斷面形狀以  $x-y$  平面內之封閉曲線  $D_1, D_2, \dots, D_p$  表示；時間及重力加速度各以  $t$  及  $g$  表示。

當一定週頻率  $\sigma$  ( $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ ) 之正弦波入射時，若假設流體運動為非壓縮性、無黏性之理想流體運動，則其速度勢  $\Phi(x, y, z; t)$  存在，同時並滿足 Laplace 方程式

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z; t) = 0 \quad (2.1)$$

同時在不透水海底面上，由於其法線方向流速為零之邊界條件得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad (2.2)$$

又若自由水面波形以  $\zeta(x, y; t)$  表示，則在自由水面上之動力學及運動學邊界條件分別為

$$\zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad z = \zeta \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad z = \zeta \quad (2.4)$$

又在幾何學邊界（柱狀體之側壁面）上，其法線方向上流速應為零則可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad (\nu \text{ 表向外法線}) \quad (2.5)$$

若假設結構物（柱狀體群）不存在時入射波之速度勢以  $\Phi^i(x, y, z; t)$  表示，因柱狀體存在所引起散亂波之速度勢以  $\Phi^s(x, y, z; t)$  表示，則流體運動之速度勢可以兩者之和表示

$$\Phi(x, y, z; t) = \Phi^i(x, y, z; t) + \Phi^s(x, y, z; t) \quad (2.6)$$

同時並假設入射波之第 1 近似水面波形  $\zeta_1$  以下式表示

$$\zeta_1(x, y; t) = a \cos [k(x \cos \omega + y \sin \omega) + \sigma t] \quad (2.7)$$

但  $a$  表示入射波之振幅， $\omega$  表示入射波方向與正  $x$  軸之交角。

若將速度勢  $\Phi(x, y, z; t)$ 、水面波形  $\zeta(x, y; t)$  及週頻率  $\sigma$  分別對微小量  $\epsilon$  ( $\epsilon = ka$ ) 作級數展開，再利用微變法之關係則可求得入射波速度勢  $\Phi^i(x, y, z; t)$

$$\begin{aligned} \Phi^i &= \epsilon \Phi_1^i + \epsilon^2 \Phi_2^i \\ &= \frac{ga}{\sigma} f_1^i(x, y) \cdot \{A_1(z) e^{-i\sigma t} + ka f_1^i(x, y) A_2(z) e^{-2i\sigma t}\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

但式中

$$A_1(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}$$

$$A_2(z) = \frac{3}{8} i (\coth^2 kh - \tanh kh) \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh}$$

又若散亂波之第 1 及第 2 近似解速度勢  $\Phi_1^s(x, y, z; t)$  及  $\Phi_2^s(x, y, z; t)$  分別表示成

$$\Phi_1^s(x, y, z; t) = \frac{ga}{\sigma} f_1^s(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{-i\sigma t} \quad (2.9)$$

$$\Phi_2^s(x, y, z; t) = \frac{ga}{\sigma} f_2^s(x, y) \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} e^{-2i\sigma t} \quad (2.10)$$

則  $f_1^s(x, y)$  及  $f_2^s(x, y)$  應為滿足下列 Helmholtz 方程式之未知函數

$$\frac{\partial^2 f_1^s(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1^s(x, y)}{\partial y^2} + k^2 f_1^s(x, y) = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 f_2^s(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2^s(x, y)}{\partial y^2} + 4k^2 f_2^s(x, y) = 0 \quad (2.12)$$

如文獻(2)(3)所述，利用 Green 函數解析即可決定流體領域內任意一點之  $f_1^s(x, y)$  及  $f_2^s(x, y)$ ，

從而決定散亂波之速度勢  $\Phi_1^*$  及  $\Phi_2^*$  及流體領域之速度勢  $\Phi(x, y, z; t)$  而確定有限振幅波運動。

流體領域內任意點之速度勢  $\Phi(x, y, z; t)$  可以下式表示

$$\Phi(x, y, z; t) = \frac{ga}{\sigma} \left\{ f_1(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{-i\sigma t} + kaf_2(x, y) \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} e^{-2i\sigma t} \right\} \quad (2.13)$$

但上式中

$$f_1(x, y) = f_1^i(x, y) + f_1^s(x, y)$$

$$f_2(x, y) = f_2^i(x, y) + f_2^s(x, y)$$

若取(2.13)式之第1項代入自由水面邊界條件可得第1近似(微小振幅波解)水面波形如下式

$$\frac{\zeta_1}{a} = if_1(x, y)e^{-i\sigma t} \quad (2.14)$$

同理得

$$\frac{\zeta_2}{a} = \left\{ 2if_2(x, y) - \frac{\sigma^2}{gk} f_1^2(x, y) - \frac{g}{2\sigma^2 k} [f_{1x}^2(x, y) + f_{1y}^2(x, y) + \left(\frac{\sigma^2}{g}\right)^2 f_1^2(x, y)] \right\} e^{-2i\sigma t} \quad (2.15)$$

故由(2.14)及(2.15)式即可得第2近似(有限振幅波解)之水面波形如下式

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{a} &= \frac{1}{a} (\epsilon \zeta_1 + \epsilon^2 \zeta_2) \\ &= if_1(x, y)e^{-i\sigma t} + ka \left\{ 2if_2(x, y) - 1.5 \tanh kh \cdot f_1^2(x, y) - 0.5 \frac{\coth kh}{(kh)^2} \right. \\ &\quad \left. [f_{1x}^2(x, y) + f_{1y}^2(x, y)] \right\} e^{-2i\sigma t} \end{aligned} \quad (2.16)$$

同理由流體運動之速度勢可求得任意點之第1近似(微小振幅波解)波壓力如下式

$$\frac{p_1}{\rho ga} = if_1(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{-i\sigma t} \quad (2.17)$$

及

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho ga} &= \left\{ 2if_2(x, y) \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} - 0.5 \frac{gk}{\sigma^2} [f_{1x}^2(x, y) + f_{1y}^2(x, y) + f_1^2(x, y)] \right. \\ &\quad \left. \frac{\sinh^2 k(z+h)}{\cosh^2 kh} \right\} e^{-2i\sigma t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

故第 2 近似（有限振幅波解）之波壓力  $P$  亦可由下式求得

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho g a} &= \frac{1}{\rho g a} (\epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2) \\ &= i f_1(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{-i\sigma t} + ka \{ 2i f_2(x, y) \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} \\ &\quad - 0.5 \frac{gk}{\sigma^2} [f_{1x}^2(x, y) + f_{1y}^2(x, y) + f_{1z}^2(x, y)] \cdot \\ &\quad \left. \frac{\sinh^2 k(z+h)}{\cosh^2 kh} \right\} e^{-2i\sigma t} \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 三、實驗設備及方法

本文除利用電腦作數值分析外，同時並以實驗對單一橢圓體測定其上不同位置之波壓力值以印證之。

實驗於海洋學院水工模型試驗室之  $30^M \times 25^M \times 1^M$  之平面水槽中進行，直立式不透水橢圓體模型係以鋼板彎製而成，橢圓體長軸長 150 公分，短軸長 75 公分，高 70 公分，並分別於需要位置預留洞孔以裝設波壓計，如 Fig. 2 所示之。

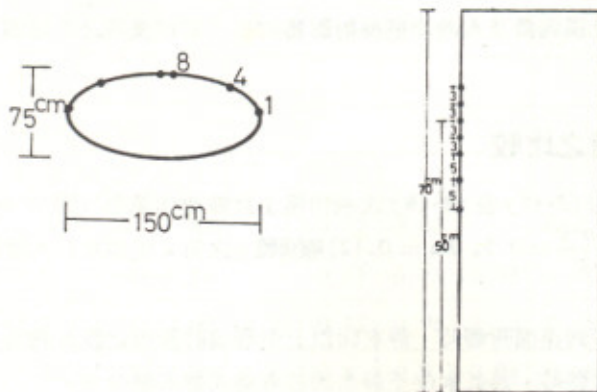


Fig. 2 橢圓體模型

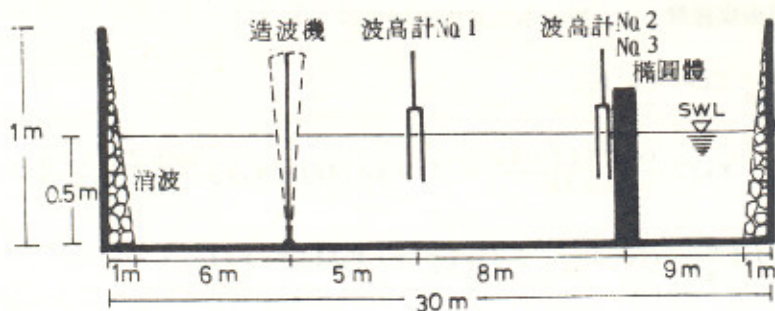


Fig. 3 實驗室佈置示意圖

實驗時，橢圓體模型放置於距造波板正前方 13 公尺處，實驗水深為 50 公分，詳細佈置如 Fig. 3 所示；入射波之週期為 2 秒，波高為 15.2 公分 ( $\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.5$ ,  $ka = 0.12$ )。測定波壓時以三支波壓計分別裝設於橢圓體上之不同位置同時測定，對每一次測定取其所記錄之最大波壓力的平均值 (3 ~ 4 個波) 為該測點該次之實驗測值；對每一測點重複數次實驗，即可得該點之數次實驗值，試驗結果分別如表 1 及表 2 所表示者。

同時，實驗時並以 1 根波高計進行波高測定工作，波高計 No 1 置於橢圓體前方 8 公尺處以測定入射波高，入射波高為取未受橢圓體及水池岸壁反射影響的三次測定波高之平均值。

#### 四、實驗值與理論值之比較

根據本文所述理論，由 (2.17) 及 (2.18) 式利用電子計算機作業對時間項  $st$  每隔  $2^\circ$  計算一次，即可求得在此波浪條件下 ( $\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.5$ ,  $ka = 0.12$ ) 橢圓體上之第 2 近似解最大波壓力值及其相對應之第 1 近似解值。

在理論計算中，當波峯到達橢圓體時，靜水面以上至理論計算出之波浪到達高度考慮成靜水壓分佈；同時，在波谷到達橢圓體時，最低水位至靜水面亦考慮成靜水壓分佈。

$\frac{z}{h}$	$\frac{p}{\rho g a}$										
	point 8			point 4				point 1			
0.12	1.62	1.77	1.83	1.99	2.09	2.21	2.32	0.78	0.85	0.96	
0.06	1.85	1.94	2.06	1.73	1.93	2.01	2.19	1.17	1.30		
0.00	2.25	2.50	2.78	1.99	2.09	2.21	2.32	1.47	1.63	1.74	
-0.06	2.25	2.35	2.44	1.73	1.93	2.01	2.19	1.28	1.45	1.61	
-0.12	1.96	2.01	2.09	1.65	1.76	1.83	1.95	1.23	1.43	1.61	
-0.22	1.83	1.96	2.06	1.68	1.74	1.84	1.93	1.30	1.43		
-0.32	1.88	1.93	2.01	1.55	1.62	1.76	1.86	1.93	1.16	1.28	1.43

表 1 波峯到達時之實驗值

$\frac{z}{h}$	$\frac{p}{\rho g a}$										
	point 8			point 4				point 1			
0.12											
0.06	-0.06										
0.00	-0.32	-0.5									
-0.06	-1.46	-1.63		-0.32	-0.48			-0.2	-0.32		
-0.12	-1.65	-1.78		-0.65	-0.73	-0.93		-0.53	-0.68		
-0.22	-1.98	-2.03	-2.25	-0.82	-0.96	-1.13		-0.65	-0.93		
-0.32	-2.23	-2.18		-0.8	-0.9	-0.98		-0.78	-0.93		

表 2 波谷到達時之實驗值

將實驗值和理論值分別繪於 Fig. 4 ~ 6 上，分析實驗結果可發現，當波峯到達時，最大波壓力發生在靜水面位置，其實驗值與第 2 近似（有限振幅波解）理論值甚為接近，而在靜水面以下之實驗值大部份均在第 1 及第 2 近似理論值間；而在計算點 4 中可發現實驗值與第 2 近似解理論值相吻合。同時，對靜水面以上考慮波壓力呈線性分佈之假設，由理論值與實驗值之比較可發現其在未發生碎波及越波現象時應屬合理之假設。

此外，在當波谷到達橢圓體時，由實驗結果可發現實驗值與理論值有相同之趨勢，且在最大波壓力附近兩者尚稱接近，但在假設成靜水壓分佈段兩者不太吻合，實驗值略大於理論值，故此假設應進一步研究修正。

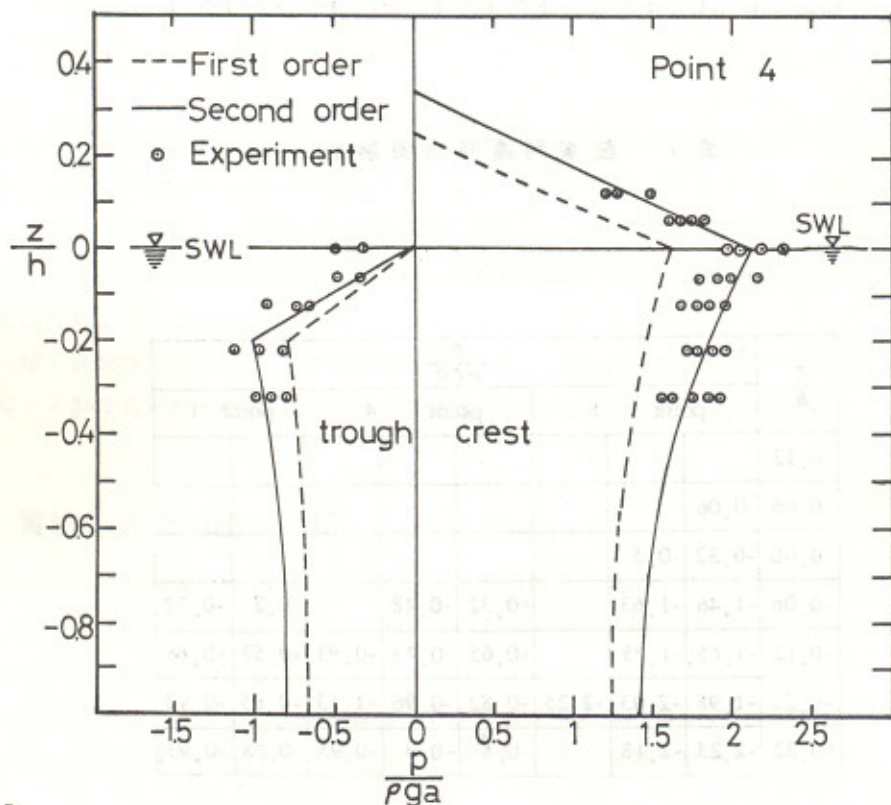


Fig. 4



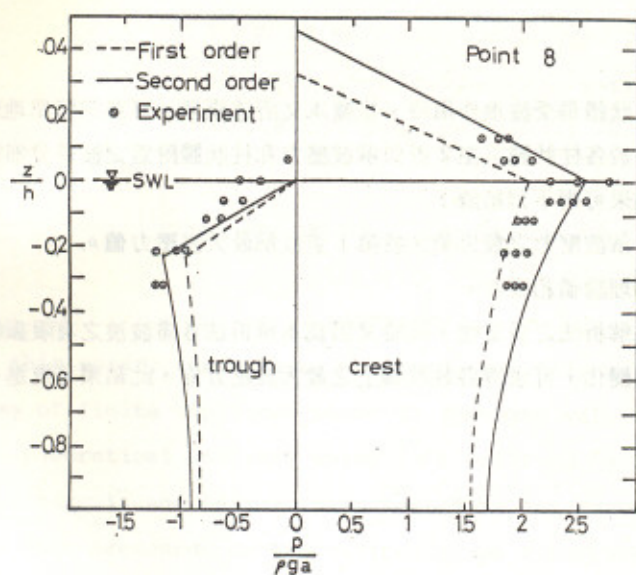


Fig. 5

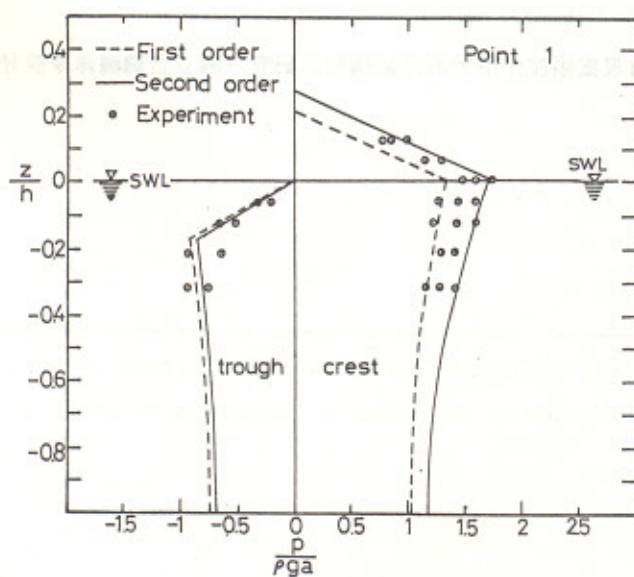


Fig. 6

## 五、結論

當任意斷面形狀之柱狀體群受波浪作用時，根據本文所述原理，可非常簡單地理論解析在受柱狀體間之相互影響時，作用於各柱狀體之第 2 近似解波壓力和柱狀體附近之波高分佈情形。

由實驗及數值計算結果可得下列結論：

1 第 2 近似有限振幅波解波壓力之最大值大於第 1 近似解最大波壓力值。

2 實驗值與第 2 近似解理論值相吻合。

故由上述之討論可證明本解析法之妥當性，同時又因為本解析法考慮波浪之有限振幅性，故由各柱狀體所受波壓力分佈之時間變化，可求得各柱狀體上之最大波壓分佈，此結果可更進一步滿足工程設計上之需要。

## 參考文獻

- (1) 周宗仁 (1979) "3 次元有限振幅波邊界值問題之解析"，國立台灣海洋學院河海工程學系河海研究第 1 號。
- (2) 周宗仁，葉榮椿 (1980)："有限振幅波作用於海洋結構物之研究"，國立台灣海洋學院河海工程系系刊第 12 期。
- (3) 葉榮椿 (1980)："有限振幅波作用於海洋結構物之研究"，國立台灣海洋學院碩士學位論文。

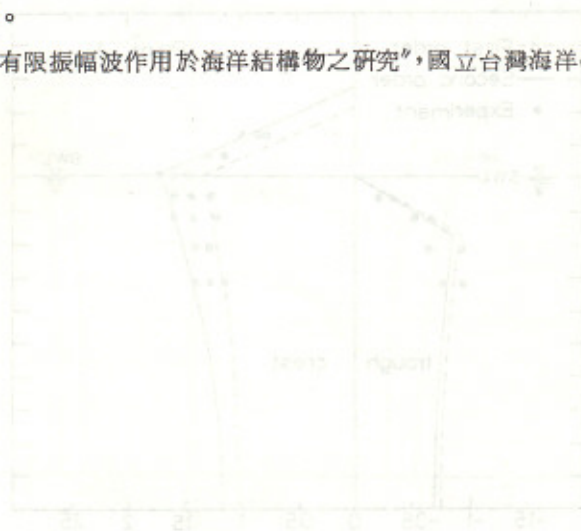


Fig. 6

THE STUDY OF WAVES ACTION ON STRUCTURES

— the comparisons between theoretical  
calculation and experimental results —

by

Chung-Ren CHOU\*    Rong-Chuen YEH\*\*

ABSTRACT

In this paper, the analysis of three-dimensional boundary-value problems of finite amplitude waves in constant water depth are discussed and the theoretical analysis which is simplified by means of Green's identity formula and perturbation method is introduced.

The wave pressures on the ellipse shape structure are obtained by the numerical calculations and by the experiments. The agreement between theoretical calculations and experiments are found to be good.

---

\*Dr. Eg., Asst. prof., Dept. of Harbor and River Engineering, C.M.O.T.

\*\*Ms. Eg., Research Assistant of Dept. of Harbor and River Engineering, C.M.O.T.