

數值解析用相關不規則波譜公式摘要

1. 方向波譜

方向波譜亦稱為 2 維波譜，若以 $D(f, \theta)$ 表示，則可將之分解如下。

$$D(f, \theta) = G(f, \theta) S(f) \quad (1)$$

$S(f)$ 表示單位頻率寬頻率成分持有的能量分布(能譜密度)，稱為頻率波譜或 1 維波譜。 $S(f)$ 如下式所示，只考量正的頻率(one-sided spectrum)

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(f) df = \zeta^{-2} \quad (2)$$

$S(f)$ 的積分值即 0 次力矩，表示不規則波振幅 ζ 的分散，等於振幅的平均自乘，即 m_0 表示波譜全能量。

$G(f, \theta)$ 表示方向波譜 $D(f, \theta)$ 的方向分布特性，稱為方向函數。 $G(f, \theta)$ 假定主波向 $\mp 90^\circ$ 以內的方向分布，通常以下式定義之。

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(f, \theta) d\theta = 1 \quad (3)$$

2011 埃及尼羅河之旅

依 Longuet-Higgins(1952)，波能譜與有義波高 $H_{1/3}$ 或平均波高 \bar{H} 間，若頻率波譜的頻率分布寬，狹致可忽略時，得

$$H_{1/3} = 1.6\bar{H} = 4.0\sqrt{m_0} = 4.0\sqrt{\int_0^{\infty} S(f) df} = 4.0\sqrt{\int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(f, \theta) d\theta df} \quad (4)$$

當頻率分布寬廣時，若利用零上切法求出波高時，永井(1972)依觀測確認其關係大致一致。

Rice(1944)依零上切法求得非規則波平均週期 \bar{T} 如下式

$$\bar{T} = \frac{\sqrt{m_0}}{\sqrt{m_2}} = \frac{\sqrt{\int_0^{\infty} S(f) df}}{\sqrt{\int_0^{\infty} f^2 S(f) df}} \quad (5)$$

有義波週期 $T_{1/3}$ 與平均週期 \bar{T} 間的關係，理論上尚無明確結論，依 Bretschneider(1968)及合田、永井(1974)觀測值，取下列關係

$$\bar{T} = 0.9T_{1/3} \quad (6)$$

2. 理論波譜

(1) Pierson-Moskowitz 波譜

吹送距離無限長的深海，Pierson-Moskowitz(1964)對完全發達的風波，將其頻率波譜 $S(f)$ 以下式表示

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp \left[-\beta \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^4 \right] \quad (7)$$

$\omega = 2\pi f$ 、 $\alpha = 0.0081$ 、 $\beta = 0.74$ 、 $\omega_0 = g/U_{19.5}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ 、 $U_{19.5}$ 為海面上高

19.5 公尺處的風速。將上式代入上述有義波高 $H_{1/3}$ 及平均週期 \bar{T} 得

$$H_{1/3} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{g}{\omega_0^2} = 0.0214U_{19.5}^2 \quad (8)$$

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\beta}} = 0.519U_{19.5}^2 \quad (9)$$

即得

$$H_{1/3} = 0.0792\bar{T}^2 = 0.0642T_{1/3}^2 \quad (10)$$

波譜頂點的頻率 ω_{op} 以下式表示

$$\omega_{op} = \sqrt[4]{\frac{4}{5}\beta} \omega_0 = 0.877\omega_0 = 0.789 / T_{1/3} \quad (11)$$

(2) Bretschneider-Mitsuyasu 波譜

對有限吹送距離的風波，Bretschneider(1968)提案

$$S(f) = 0.430\bar{H}^2\bar{T}(\bar{T}f)^{-5} \exp \left[-0.675(\bar{T}f)^4 \right] \quad (12)$$

爾後由光易(Mitsuyasu)修正其參數將平均波高 \bar{H} 及平均週期 \bar{T} 換置成 $H_{1/3}$ 及 $T_{1/3}$

而得下列 Bretschneider-Mitsuyasu 譜

$$S(f) = 0.257H_{1/3}^2T_{1/3}(T_{1/3}f)^{-5} \exp[-1.03(T_{1/3}f)^4] \quad (13)$$

$H_{1/3}$ 及 $T_{1/3}$ 分別為有義波波高及有義波週期， f 為頻率。
波譜頂點的頻率 f_{0p} 可以下式表示

$$f_{0p} = \frac{1}{T} \sqrt[4]{\frac{4}{5} \cdot 0.674} = 0.857 / \bar{T} = 0.952 / T_{1/3} \quad (14)$$

(3) JONSWAP 譜

Hasselmann 等依據北海波浪共同觀測計畫(JONSWAP)的成果，將其以有義波波高及波譜最頂點週期表示時，得下列 JONSWAP 譜

$$S(f) = \alpha H_{1/3}^2 T_p (T_p f)^{-5} \gamma^r \exp[-1.25(T_p f)^{-4}]$$

$$r = \exp[-(T_p f - 1)^2 / 2\sigma^2] \quad (15)$$

$$\alpha \approx \frac{0.0624}{0.230 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}} \quad \text{戴滿珠寶的駱駝}$$

$$\sigma = \begin{cases} 0.07 & f \leq f_p \\ 0.09 & f \geq f_p \end{cases} \quad \text{2011 埃及尼羅河之旅}$$

$\gamma = 1 \sim 7$ (平均為 3.3)

f_p 為波譜最頂點處的頻率， T_p 為其倒數。JONSWAP 譜導入表示頂點尖銳度的參數 γ ， $\gamma = 1$ 時與 Bretschneider-Mitsuyasu 譜一致。在北海得到的觀測平均， $\gamma = 3.3$ ，波譜最頂點值約為 Bretschneider-Mitsuyasu 譜的 2.2 倍。

(4) 方向函數

方向函數表示各方向的能量分佈狀態，其函數形式通常隨頻率而異，故必要將頻率一併考量。方向函數為無次元量，表示各方向的相對分佈量，其正規化形式如下

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(f; \theta) d\theta = 1 \quad (16)$$

① Arthur 型方向函數

$$G(f; \theta) = G(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta & : |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & : |\theta| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{阿拉丁神燈} \quad (17)$$

② SWOP 型方向函數

$$G(\omega; \theta) = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + \left[0.5 + 0.82 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \right) \right] \cos 2\theta + 0.32 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \right] \cos 4\theta \right\} \quad (18)$$

$\theta \leq \pi/2$, $\omega = 2\pi f$, $\omega_0 = g/U_{5.0}$, $U_{5.0}$ 是海面上 5m 高處的風速。

③ 光易型方向函數

$$G(f; \theta) = G(\theta) = \begin{cases} \frac{2\ell!!}{\pi(2\ell-1)!!} \cos^{2\ell} \theta & : |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 & : |\theta| > \pi/2 \end{cases} \quad (19)$$

$2\ell!! = 2\ell \cdot (2\ell-2) \cdots 4 \cdot 2$, $(2\ell-1)!! = (2\ell-1) \cdot (2\ell-3) \cdots 3 \cdot 1$ 。

光易型方向函數原式的集中度 S ，為風速的函數，在工程應用上不太方便，合田與鈴木導入 S 的最大值 S_{\max} ，將 S 原式改寫成下列形式。

$$S = \begin{cases} S_{\max} * (f/f_p)^5 & : f \leq f_p \\ S_{\max} * (f/f_p)^{-2.5} & : f \geq f_p \end{cases}$$

f_p 是頻率譜頂點處的頻率，可以下式推算。

$$f_p = \frac{1}{1.05T_{1/3}}$$

ℓ 與 S_{\max} 間的關係如下。

$$\ell = 0.11S_{\max} \quad : \ell \geq 2$$

通常 S_{\max} 可採用下列的值

$$S_{\max} = \begin{cases} 10 & : \text{風波} \\ 25 & : \text{衰減距離短的湧浪} \\ 75 & : \text{衰減距離長的湧浪} \end{cases}$$

3. Bretschneider-Mitsuyasu 波譜無因次化

(1) 無因次頻率譜

頻率譜 $S(f)$ 的因次為 L^2T ，若能將之無因次化，會有利爾後計算，因此將頻率 f 乘以有義波週期 $T_{1/3}$ ，可得無因次頻率 f^* 如下

$$f^* = T_{1/3} f \quad (20)$$

利用下列關係

$$S^*(f^*) = S(f) / H_{1/3}^2 = S(f) / (H_{1/3}^2 T_{1/3}) \quad (21)$$

可得無因次波譜如下

$$S^*(f^*) = a(f^*)^{-5} \exp\left\{-\left[b(f^*)^4\right]\right\} \quad (22)$$

$$a = b / 4$$

$$b = 1.0288$$

波譜頂點的無因次頻率 f_{op}^* 為

$$f_{op}^* = 0.952$$

而

$$m_0^* = \int_0^{\infty} S^*(f^*) df^* = \frac{b}{4a} = \frac{1}{16}$$

$$H_{1/3}^* = 4.0 \sqrt{m_0^*} = 1$$

$$T_{1/3}^* = \frac{1}{0.9} \sqrt{\frac{m_0}{\int_0^{\infty} f^{*2} S^*(f^*) df^*}} = \frac{1}{0.9 \sqrt{\pi b}} = 0.829 \quad (26)$$

(2) SWOP 方向函數變形

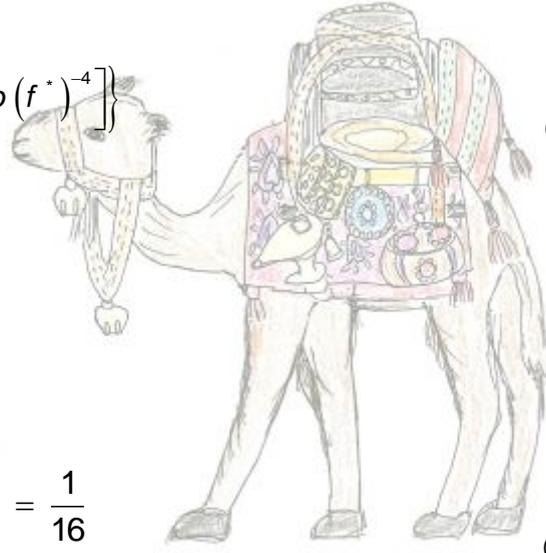
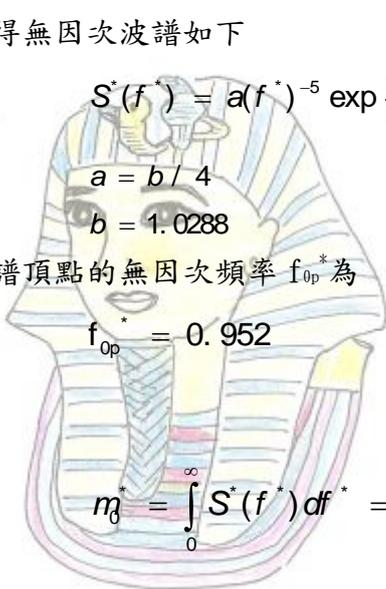
(18)式所示 SWOP 方向函數是由 ω/ω_0 及 θ 等無因次變數所構成的無因次量，但為配合無因次頻率譜 $S^*(f^*)$ 必要將 ω/ω_0 換置成 f^* 如下式(永井，1972)。

$$Q(f^*, \theta) = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + \left[0.5 + 0.82 \exp(-0.4419(f^*)^4) \right] \cos 2\theta \right. \\ \left. + 0.32 \exp(-0.4419(f^*)^4) \cos 4\theta \right\} \quad (27)$$

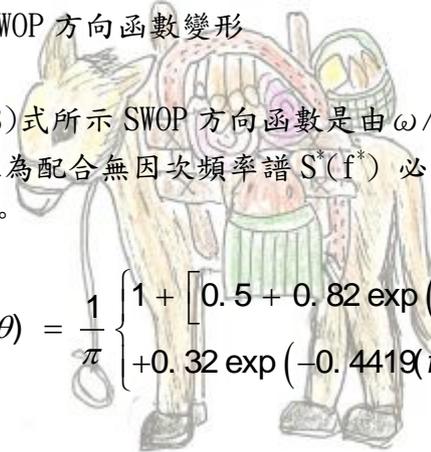
4. 等能量無因次波譜分割

(1) 頻率波譜

欲利用波譜線性疊加法解析波變形，必要將上述無因次化波譜，依頻率及方向加以分割，對各成分波視為正弦波而加以解析。波譜分割時，如何處理高頻部分的成分波，會關係計算結果。雖然高頻成分波持有能量非常小，對波高



載滿珠寶的駱駝



阿拉丁神燈

影響可忽略，但是對週期，依(26)式的分母可知，因 f^{*2} 會變大，即無法忽略高頻成分波對週期的影響。為正確計算波高及週期，若波譜分割數為 m ，首先決定能使各成分波均持有相同能量 ΔE 的分割頻率 f_n^* ， $n=1, 2, \dots, m (f_m^* = \infty)$ 。依(24)式得 ΔE 如下式

$$\Delta E = \frac{1}{16m} \quad (28)$$

即得

$$\int_0^{f_n^*} S^*(f^*) df^* = n\Delta E = \frac{n}{16m} \quad (29)$$

將(22)式所述 $S^*(f^*)$ 代入上式得

$$f_n^* = \sqrt[4]{\frac{b}{\ell_n(m/n)}} = 1.00714 \sqrt{\ell_n(m/n)} \quad (30)$$

依上述分割得到的各成分波的代表頻率 f_{cn}^* ，必定會在 f_{n-1}^* 及 f_n^* 間。由於各成分波的代表頻率 f_{cn}^* 的能量 ΔE 對 f_{cn}^* 的 2 次力矩，與無因次波譜 $S^*(f^*)$ 對原點的 2 次力矩，必要相等的條件，即

$$\int_{f_{n-1}^*}^{f_n^*} f^{*2} S^*(f^*) df^* = f_{on}^{*2} \Delta E = \frac{f_{on}^{*2}}{16m} \quad (31)$$

2011 埃及尼羅河之旅

將(22)式所述無因次波譜 $S^*(f^*)$ 代入上式得

$$f_{on}^* = \sqrt{\frac{8am\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2\ell_n \left(\frac{m}{n-1} \right)} \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{2\ell_n \left(\frac{m}{n} \right)} \right) \right]}$$

$$= \frac{1}{0.9} \sqrt{2.9124m \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2\ell_n \left(\frac{m}{n-1} \right)} \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{2\ell_n \left(\frac{m}{n} \right)} \right) \right]}$$

$$\operatorname{erf}(t) = \int_0^t \frac{\exp(-z^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dz \quad \dots\dots\dots \text{誤差函數}$$

(2) 方向函數

方向函數 $G(f^*, \theta)$ 對波向 θ 係採用等分割法。

5. 水深 h 、週期 T 與波長 L 間的關係

(1) 規則波

在微小振幅波理論，波受水深變化或繞射等影響，波長或波高會發生變

化，但是在微小振幅波理論下，週期會保持一定不變，即已知水深及週期時，波長可依下列分散關係式決定

$$L = \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (33)$$

深海處波長 L_0 為

$$L_0 = \frac{g}{2\pi} T^2 = 1.56T^2 \quad (34)$$

(2) 不規則波

不規則波的各波譜成分波均視為規則波，水深、週期與波長間的關係滿足上列分散關係式。有義週期則會因不規則波受水深變化或繞射等作用而發生變化。探討不規則波變形時，必要設定能用水深及不規則波週期決定的波長作為基準，規定不規則波的水深波長比，以判別任意水深的非規則波，並覓出不規則波的水深波長比與波譜成分波的水深波長比的關連，使其能適用於規則波的變形理論。

設定作為基準的非規則波長 $L_{1/3}$ 滿足下列方程式

$$L_{1/3} = \frac{g}{2\pi} T_{1/3}^2 \tanh \frac{2\pi h}{L_{1/3}} \quad (35)$$

$T_{1/3}$ 是依零上切法求得的有義週期，以及表示在水深 h 處，週期為 $T_{1/3}$ 的微小振幅波的波長，可稱之為對應有義波長。作為不規則波的波譜成分波的規則波週期 T 、波長 L 與不規則波的有義週期 $T_{1/3}$ 、對應有義波長 $L_{1/3}$ 間的比值分別如下

$$T^* = \frac{T}{T_{1/3}} = \frac{1}{T_{1/3} f} = \frac{f_{1/3}}{f} = \frac{1}{f^*} \quad (36)$$

$$L^* = \frac{L}{L_{1/3}} \quad (37)$$

f 為週期 T 的倒數，*表示無因次量。由(34)及(35)式得

$$L^* = \frac{L}{L_{1/3}} = \left(\frac{T}{T_{1/3}} \right)^2 \frac{\tanh 2\pi h / L}{\tanh 2\pi h / L_{1/3}} = (f^*)^{-2} \frac{\tanh 2\pi h^* / L^*}{\tanh 2\pi h^*} \quad (38)$$

$$h^* = \frac{h}{L_{1/3}} \quad (39)$$

深海的對應有義波長 $(L_{1/3})_0$ 依(35)式為

$$(L_{1/3})_0 = \frac{g}{2\pi} (T_{1/3})_0^2 \quad (40)$$

$(T_{1/3})_0$ 為深海處不規則波有義週期， $(L_{1/3})_0$ 為深海對應有義波長。利用 $(L_{1/3})_0$ 將波譜成分波的波長無因次化，可得

$$L_0^* = (L_{1/3})_0^* = \frac{L}{(L_{1/3})_0} = \left(\frac{T}{(T_{1/3})_0} \right)^2 \tanh \frac{2\pi h}{L} = (f_0^*)^{-2} \tanh \frac{2\pi h_0^*}{L_0^*} \quad (41)$$

$$f_0^* = \frac{f}{f_0} = (T_{1/3})_0 f = \frac{(T_{1/3})_0}{T} = \frac{1}{T_0^*}$$

$$h_0^* = \frac{h}{(L_{1/3})_0}$$

將(38)及(41)式變形得不規則波無因次量的相互關係如下

$$2\pi h^* (f_0^*)^2 \tanh 2\pi h^* = \frac{2\pi h^*}{L^*} \tanh \frac{2\pi h^*}{L^*} \quad (42)$$

$$2\pi h_0^* (f_0^*)^2 = \frac{2\pi h_0^*}{L_0^*} \tanh \frac{2\pi h_0^*}{L_0^*} \quad (43)$$

依上兩式可取得不規則波水深波長比 h^* 、 h_0^* 與成分波水深波長 $h/L = h^*/L^* = h_0^*/L_0^*$ 間的關係，當 $f^*=1$ 、 $L^*=1$ 時可視為正弦規則波。

2011 埃及尼羅河之旅

6. 單方向不規則波作用時的波高比 K_H 及週期比 K_T

外海處入射波單方向入射時，若外海處頻率波譜以 $S_0(f)$ 表示，波向淺海進行，受地形、結構物等影響產生變形，任意水深處的頻率波譜以 $S(f)$ 表示，二者間有下列關係

$$S(f) = K_d^2 S_0(f) \quad (44)$$

K_d 是對各成分波，從外海向淺海進行，受地形、結構物等影響產生變形時，依數值計算得到的「任意水深處波高與外海處波高的比值」。單方向不規則波作用時的波高比 K_H 及週期比 K_T 可分別依下式取得。

$$K_H = \frac{H_{1/3}}{(H_{1/3})_0} = 4.0 \sqrt{\int_0^\infty K_d^2 S_0(f_0^*) df_0^*} = 4.0 \sqrt{\sum \Delta E} \quad (45)$$

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

$$K_T = \frac{T_{1/3}}{(T_{1/3})_0} = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi b}} \sqrt{\frac{\int_0^\infty K_d^2 S_0(f_0^*) df_0^*}{\int_0^\infty K_d^2 f_0^{*2} S_0(f_0^*) df_0^*}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi b}} \sqrt{\frac{\sum \Delta E^*}{\sum f_0^{*2} \Delta E^*}}$$

$$\Delta E^* = K_d^2 S_0(f^*) \Delta f_0^*$$

(46)

(47)

7. 多方向不規則波作用時的波高比 K_H 及週期比 K_T

不規則波的各成分波各有其波向 α ，對整體不規則波則另有方向性能量(方向波譜的對頻率積分值)最大的卓越波向 α_p 及對方向波譜的對頻率積分值對 $\alpha - \alpha_p$ 的 1 次力矩能保持左右平衡的平均波向 α_m 。方向函數內的 θ 與 α 間有下列關係

$$\alpha = \theta + \alpha_p \quad (0 \leq \alpha_p \leq \pi/2) \quad (48)$$

深海處的方向波譜 $D_0(f, \alpha_0)$ 與任意水深處的方向波譜 $D(f, \alpha)$ ，適用能量保存法則時，各對應成分波間下列關係存在

$$D(f, \alpha) \Delta f \Delta \alpha = K_H^2 D_0(f, \alpha_0) \Delta f \Delta \alpha_0 \quad (49)$$

K_H 為波受變形時的波高係數(任意水深處波高/深海處入射波高)， Δf 為頻率分割寬，水深入 h 變化時亦保持不變。 $\Delta \alpha$ 、 $\Delta \alpha_0$ 分別為淺海、深海處的波向 α 、 α_0 所含微小角。

$$K_H = \frac{H_{1/3}}{(H_{1/3})_0} = 4.0 \sqrt{\int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D^*(f^*, \alpha) d\alpha df^*}$$

$$= 4.0 \sqrt{\sum \sum \Delta E^*}$$

$$K_T = \frac{T_{1/3}}{(T_{1/3})_0} = \sqrt[4]{\pi b} \sqrt{\frac{\int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D^*(f^*, \alpha) d\alpha df^*}{\int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^{*2} D^*(f^*, \alpha) d\alpha df^*}}$$

$$= \sqrt[4]{\pi b} \sqrt{\frac{\sqrt{\sum \sum \Delta E^*}}{\sqrt{\sum \sum f^{*2} \Delta E^*}}}$$

$$D^*(f^*, \alpha) = K_d^2 D_0^*(f^*, \alpha)$$

$$\Delta E = K_d^2 D_0(f, \alpha_0) \Delta \alpha_0 \Delta f$$



載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈