

頻率領域平面 2 維問題

實際海上，波浪受結構物存在影響會產生反射及繞射現象，受海底地形變化影響會產生折射現象。在水深一定海域，波浪只有散射，無折射現象產生，對一定水深海域直線防波堤或其他規則形狀結構物可用特殊函數加以解析，對實際呈複雜形狀港池水域，波變形、盪漾現象，或任意形狀島堤對波繞射現象少有理論解析法，邊界元素法對上述各種問題解析非常有效。

首先說明利用邊界元素法平面 2 維問題離散化，以解析水深一定海域中，數個任意斷面形狀直立柱體存在引起波變形，及作用於柱體波力問題。推展至港池水面波動問題，實際港內水深，基於船舶航行安全，會作定期浚深，將港內水深視為等水深，在工程上屬合理近似，港外水深以實際水深為宜，進行初步規劃工作時，將港外水深視為與港內水深相等，了解港池水面是否會產生共振現象或概估港內波高分佈，利用邊界元素法是非常簡單、符合快速和經濟的數值分析方法。

本文以無限開放海域數個柱狀體存在，引起包含柱狀體間相互干擾的繞射問題為例，說明分析步驟。

1. 理想流體微小振幅波運動

2011 埃及尼羅河之旅

設定流體為非粘性非壓縮性理想流體，在一定水深 h 海域靜水面取座標原點 O ，水平面取 x 、 y 軸，垂直向上方向取 z 軸，時間及重力加速度以 t 及 g 表示，入射波為振幅 ζ_0 、週頻率 $\sigma (=2\pi/T; T$ 為波週期) 的簡谐波，流體運動的微小振幅波速度勢 $\Phi(x, y, z; t)$ 可以下式表示。

$$\Phi(x, y, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi(x, y, z) e^{-i\sigma t}$$

(1) 支配方程式

勢函數 $\phi(x, y, z)$ 應為滿足下列 Laplace 方程式的函數

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

(2) 靜水面邊界條件

靜水面上，由於運動學條件及大氣壓力一定的條件，可得下列

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi \quad (z=0)$$

(3) 固定不透水任意地形海底邊界條件

固定不透水任意地形海底，由於流體在法線方向流速為零，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad n: \text{向外法線方向}$$

(4) 固定柱狀體不透水面邊界條件

固定柱狀體不透水面，由於流體在法線方向流速為零，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad n: \text{向外法線方向}$$

(5) 假想邊界條件

守恆原則下，在任意假想位置的邊界條件有2:

① 假想邊界兩側的流體運動引起的能量流束必須連續，即兩側流體作用於假想邊界面的壓力必須相等，壓力可依壓力方程式計算。

② 假想邊界兩側的流體運動引起的質量流束必須連續，即兩側流體通過假想邊界面的流量(兩側等水深時為流速)必須相等。

依上述2條件可推導出任意假想位置的邊界條件。

(6) 無限遠處輻射條件

無限遠處2維Sommerfeld輻射條件如下

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \text{ 或 } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm i k \phi, \quad x \rightarrow \infty$$

(7) 消波岸壁邊界條件

防波堤或岸壁具有任意反射率 K_r 時，消能係數 α 可以下式定義

$$\alpha = \sqrt{1 - K_r^2} \quad \text{2011 埃及尼羅河之旅}$$

得下列消波防波堤或岸壁上 ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的關係

$$\bar{\phi} = i k \alpha \phi$$

反射率等於1時，消能係數 α 等於0，表示岸壁無消能效果。

(8) 考量摩擦效應不透水海底邊界條件

若海底面具有摩擦效應，摩擦係數為 α_f 時， ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的關係為

$$\bar{\phi} = i \alpha_f \phi$$

必須依實驗決定，不考量海底摩擦時， α_f 等於0。

2. 等水深開放外海領域的入射波 $f_0(x, y)$ 及繞射波勢函數 $f(x, y)$

設定外海領域水深為一定 h 的條件，可利用變數分離法將勢函數 $\phi(x, y, z)$ 分離成為，依靜水面邊界條件決定的與水深 z 有關的已知函數，及與平面位置 (x, y) 有關的未知函數。即勢函數 $\phi(x, y, z)$ 可以下式表示

$$\phi(x, y, z) = [f_0(x, y) + f(x, y)] \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \quad (1)$$

$f_0(x, y)$ 及 $f(x, y)$ 分別表示入射波及繞射波， k 為下列方程式之根

$$\frac{\sigma^2}{g} = kh \tanh kh$$

若入射波 $f_0(x, y)$ 為與 x 軸呈 ω 角度入射的餘弦波，水面波形 $\zeta_i(x, y; t)$ 可以下

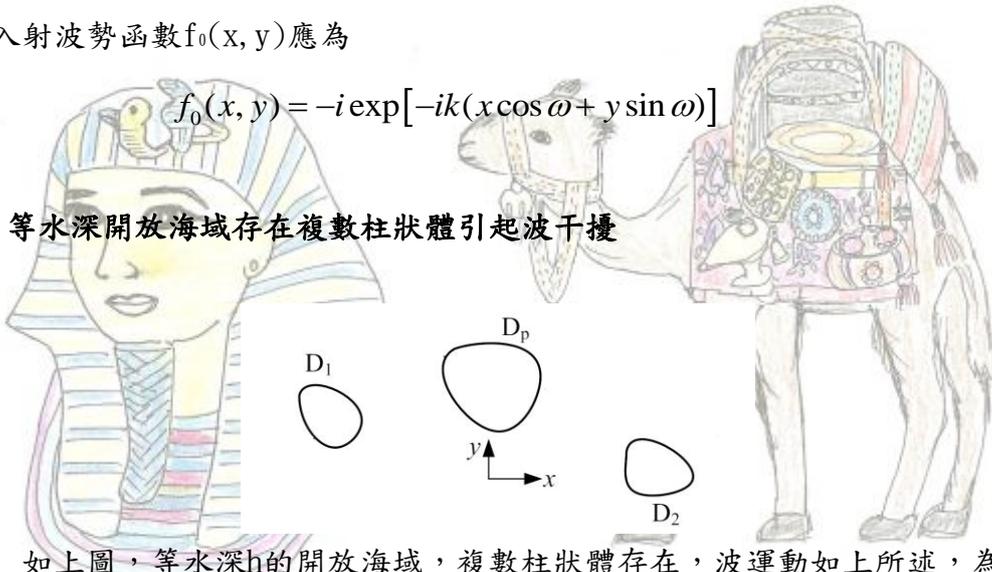
式表示

$$\zeta_i(x, y; t) = \zeta_0 \cos[k(x \cos \omega + y \sin \omega) + \sigma t]$$

則入射波勢函數 $f_0(x, y)$ 應為

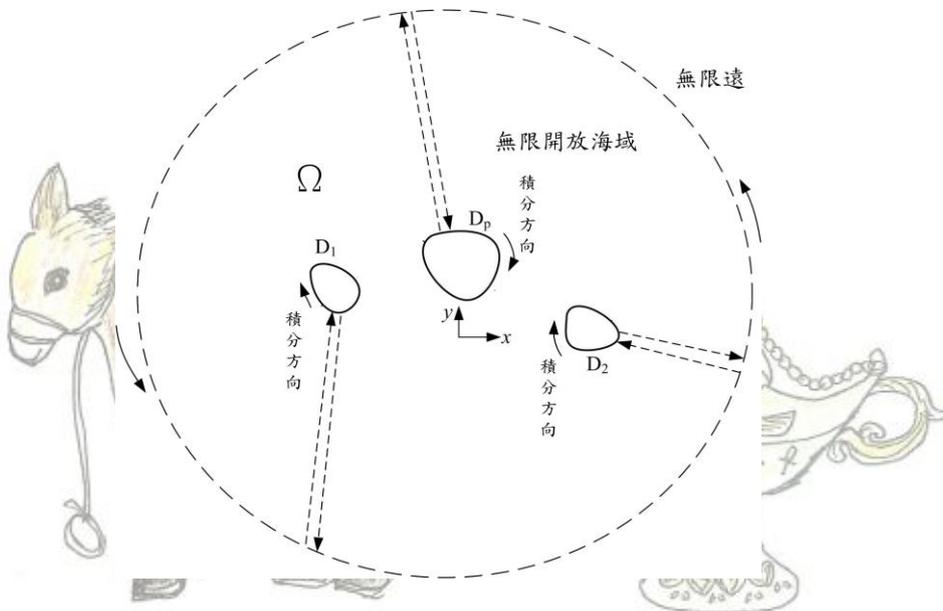
$$f_0(x, y) = -i \exp[-ik(x \cos \omega + y \sin \omega)]$$

3. 等水深開放海域存在複數柱狀體引起波干擾



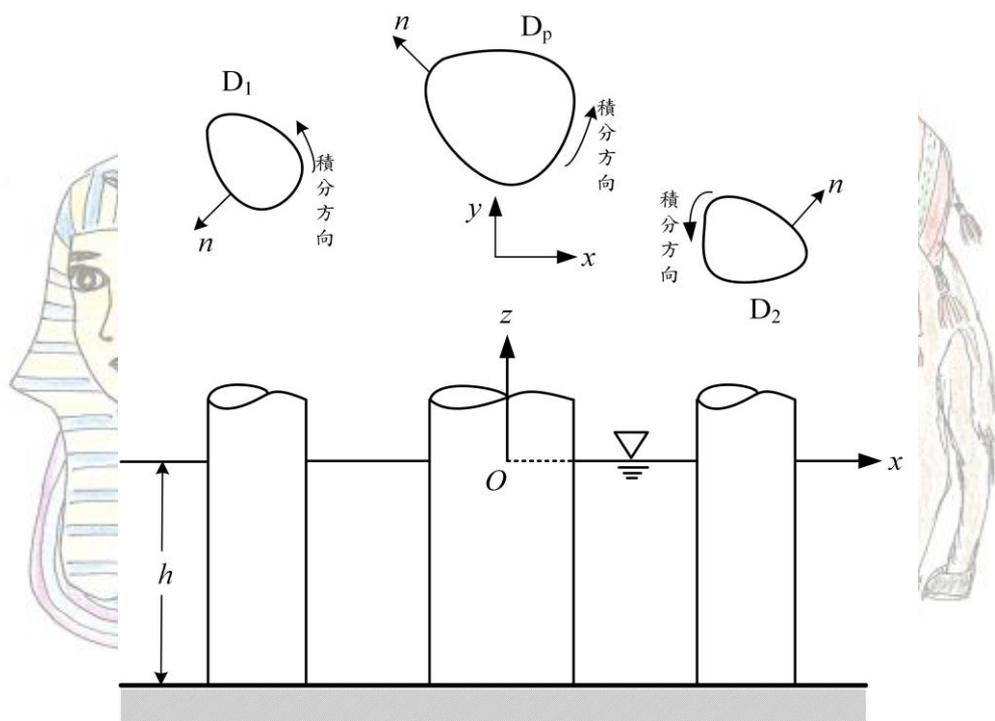
如上圖，等水深 h 的開放海域，複數柱狀體存在，波運動如上所述，為滿足 Laplace 方程式的理想流體微小振幅波運動。應用邊界元素法解析時，必要確認邊界上的邊界條件，由於海域為無限開放海域，首先畫定解析海域如下圖，由無限遠處的假想邊界及各柱狀體邊界 $D_p (p=1, 2 \dots P)$ 構成封閉領域 Ω ，積分方向為逆時針。

2011 埃及尼羅河之旅



積分路徑如上圖，可從無限遠處假想邊界任意一點開始，向某 1 柱狀體設假想積分路，再沿柱狀體邊界積分後，再設假想積分路回無限遠處假想邊界，對其他柱狀體以此類推，當柱狀體與無限遠處假想邊界的積分路徑無限接近時，其積分會相互抵消。另外在無限遠處假想邊界繞射波勢函數 $f(x, y)$ 會趨近於 0，因此可忽略之，得到如下圖所示各柱狀體邊界積分。原本各柱狀體邊界的積分方向為順時針，法線方向以向內為正。為配合一般法線方向以向外為正，

將積分方向變為逆時針，不會影響邊界積分方程式。



$f(x, y)$ 應為滿足下列 Helmholtz 方程式的未知函數

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0$$

依 Helmholtz 方程式基本解應用所述，對 $f(x, y)$ 的基本解應為 $-\frac{1}{4} H_0^{(1)}(Kr)$ 。將各邊界面 D_p 以 n_p 個一定元素加以離散，依邊界積分方程式應用於 Helmholtz 方程式所述(為說明重複記述)，邊界面上 f 與其法線方向導函數 $\bar{f} (= \partial f / \partial n)$ 的關係式如下

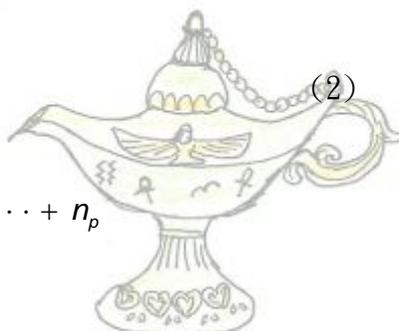
$$F = K \bar{F}$$

$$K = H^{-1} G$$

$$F = f_j, \quad \bar{F} = \bar{f}_j, \quad j = n_1 + n_2 + \dots + n_p$$

$$H = H_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & i \neq j \\ H_{ij} + \frac{1}{2} & i = j \end{cases}$$

$$G = G_{ij}$$



阿拉丁神燈

H_{ij} 及 G_{ij} 數值計算如下

$i \neq j$ 時

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr) \right) d\Gamma$$

$$\approx \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \Gamma_j$$

$$= \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \Gamma_j$$

$$= \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \cdot \Gamma_j$$

$$\approx \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr) \left(\frac{x_j - x_i}{r} \Delta y_j - \frac{y_j - y_i}{r} \Delta x_j \right)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left(-\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr) \right) d\Gamma \approx -\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr) \cdot \Gamma_j$$

s表示切線

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_j &= \frac{1}{2} (x_{j+1} - x_{j-1}), \Delta y_j = \frac{1}{2} (y_{j+1} - y_{j-1}) \\ r &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \Gamma_j = \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2} \end{aligned} \right\}$$

i = j時

由於 $kr \rightarrow 0$ 時, $H_1^{(1)}(kr) \rightarrow -i \frac{2}{\pi} \frac{1}{kr}$, 故

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr) \right) d\Gamma$$

$$\approx \frac{i}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \left(-k H_1^{(1)}(kr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \right) \Gamma_j$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Gamma_j \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left(\frac{x_j - x_i}{r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{y_j - y_i}{r} \frac{\partial x}{\partial s} \right)$$

載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈

$$\approx \frac{1}{2\pi} \Gamma_j \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left(\frac{x_j - x_i}{r} \frac{\Delta y}{\Delta s} - \frac{y_j - y_i}{r} \frac{\Delta x}{\Delta s} \right), (\Delta s = \Gamma_j)$$

將 $x_j - x_i, y_j - y_i, \Delta x / \Delta s$ 及 $\Delta y / \Delta s$ 對 Δs 作 Taylor 展開, 因 $i = j$ 時, $r \rightarrow 0$, 即表示 $\Delta s \rightarrow 0$, 得

$$H_{ii} = \frac{1}{2\pi} \Gamma_i \cdot \frac{1}{2} (y_{ss} x_s - x_{ss} y_s)_i$$

$$= \frac{1}{4\pi} (y_{ss} x_s - x_{ss} y_s)_i \Gamma_i$$

kr→0時， $H_0^{(1)}(kr) \rightarrow 1 + i \frac{2}{\pi} (\ln(kr/2) + \gamma)$ ，對元素取平均值，得

$$G_{ii} = \frac{2}{\Gamma_i} \int_0^{\Gamma_i/2} \left[1 + i \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{kr}{2} + \gamma \right) \right] dr \cdot \Gamma_i$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\gamma - 1 + \ln \frac{k\Gamma_i}{2} - i \frac{\pi}{2} \right] \cdot \Gamma_i$$

$\gamma = 0.577216 \dots$ (Euler常數)

由於柱體設定為不透水性，各閉曲線D_p上之法線方向流速應為0，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

將(1)式代入上式得

$$\frac{\partial f_0}{\partial n} = - \frac{\partial f}{\partial n}$$

2011 埃及尼羅河之旅

將上式代入(2)式得

$$F = -K \bar{F}^0$$

由於 \bar{F}^0 表示 $\partial f_0 / \partial n$ 矩陣為已知值，上式可求得各閉曲線上f值。海域內任意1點之f(x,y)值可由下式求得，

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^p \sum_{j=1}^{n_p} \bar{f}_j G_{xj} - \sum_{p=1}^p \sum_{j=1}^{n_p} f_j \hat{H}_{xj}$$

$$\bar{f}_j = \frac{\partial f_j}{\partial n}$$

計算 G_{xj} 及 \hat{H}_{xj} 時，只須將上述 H_{ij} 及 G_{ij} 值中的i點座標以(x,y)點座標取代即可。

海域內任意1點繞射係數K_D可以下式決定

$$K_D = f_0(x, y) + f(x, y)$$

作用於各柱體合壓力在x, y之正方向分力，可由下式計算

$$\frac{F_x}{\rho g \zeta_0 h^2} = -i e^{-i\sigma} \frac{\sigma^2 h}{g} \sum_{j=1}^{n_p} [f_0(x_j, y_j) + f(x_j, y_j)] \Delta y_j$$

$$\frac{F_y}{\rho g \zeta_0 h^2} = -i e^{-i\sigma} \frac{\sigma^2 h}{g} \sum_{j=1}^{n_p} [f_0(x_j, y_j) + f(x_j, y_j)] \Delta x_j$$