等水深入射波及透過波領域微小振幅波的速度勢函數(嚴密解)

斷面2維波動問題，比較常見問題如圖1～圖7所示

圖1　任意海底地形

圖2　透水式潛堤

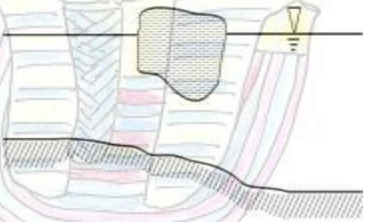


圖3　半潛式浮體

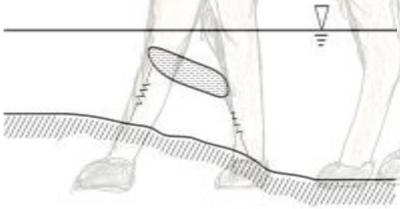


圖4　潛水式浮體

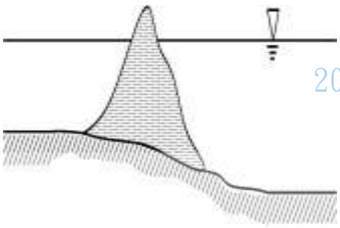


圖5　透水式防波堤

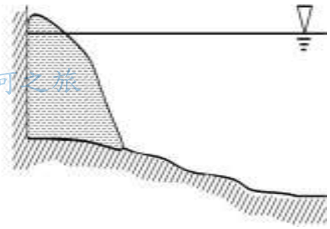
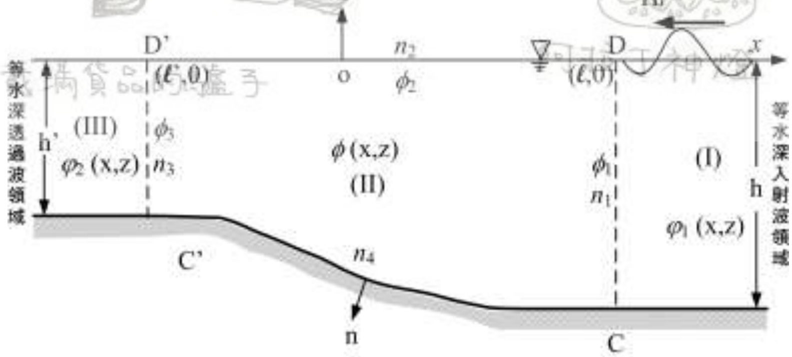


圖6　消波護岸

圖7　任意海岸斷面

以下圖為例，



海底$\overline{CC'}$段間地形作不規則變化，進行數值分析，假定簡諧入射波從右向x軸負方向進行。解析波浪受海底地形變化引起波變形，此時有2種解析方法可應用:

① 如圖，假定從C點向右側的水深一定為h，從C'點向左側水深為h′，在一定水深與任意水深交接處設置假想邊界線，將流體領域分割成一定水深領域及任意水深變化領域，一定水深領域流體運動，考量因地形變化引起波散射現象，屬數值嚴密解析解，可節省電子計算機計算容量及時間，但是公式推導過程比較複雜，對適用於非線性、非簡諧性或造波問題困難度較高。

② 將一定水深領域設置於不受地形變化引起波散射現象處，入射波領域僅有入射波及反射波存在，透過波領域只有透過波存在，即忽略因地形變化所引起散射波，此方法屬數值近似解，好處是公式推導簡單，可推展至非線性、非簡諧性或造波問題，但是需大量電子計算機計算容量及時間。

嚴密解析解的解析方法如下：

(1) 等水深入射波領域速度勢函數

如上圖，振幅ζ_0，週頻率σ的簡諧波從水深h處向左入射。在C、C'處分別作垂直線$\overline{CD}$及$\overline{C'D'}$將流體領域分割成$\overline{CD}$面右側等水深h入射波領域(Ⅰ)，$\overline{C'D'}$面左側等水深h′透過波領域(Ⅲ)及由$CDD'C'C$包圍不等水深領域(Ⅱ)。

一定水深h入射波領域，勢函數φ_1(x，z)可以下式表示

$$\varphi_1(x,z) = \left[e^{ik(x-\ell)} + A_0 e^{-ik(x-\ell)}\right]\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-k_m(x-\ell)}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \qquad \text{(A)}$$

ℓ為假想邊界線至原點o間距離，k及k_m為下列分散關係式的根

$$kh\tanh kh = -k_m h\tanh k_m h = \sigma^2 h/g \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \text{(B)}$$

(A)式第1項及第2項分別表示入射波及反射波的勢函數，第3項級數項表示散射波勢函數，A_0及A_m為複數積分常數，$|A_0|$表示反射率。

假想邊界線$\overline{CD}$上勢函數及其向x正方向導函數值，可以下式表示

$$\varphi_1(\ell, z) = (1 + A_0)\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} A_m \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \qquad \text{(C)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(\ell, z) = ik(1 - A_0)\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m k_m \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \qquad \text{(D)}$$

假想邊界線 $\overline{CD}$ 上，由於橫貫 $\overline{CD}$ 的質量流束（mass flux）及能量流束（energy flux）的連續，得

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(z) &= \varphi_1(\ell, z) \\ \bar{\phi}_1(z) &= \bar{\varphi}_1(\ell, z) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(E)}$$

將(C)及(D)式分別代入上式得

$$(1 + A_0)\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} = \phi_1(z) \qquad \text{(F)}$$

$$ik(1 - A_0)\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m k_m \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} = \bar{\phi}_1(z) \qquad \text{(G)}$$

將(F)式的各項分別乘以coshk(z+h)及cosk$_m$(z+h)，對z＝−h～0範圍作積分得A_0及A_m如下

$$A_0 = 1 + \frac{i}{N_0 \sinh kh}\sum_{p=1}^{n_1} \bar{\phi}_1(p) \cdot \cosh k(z_p + h) \cdot \Delta z_p \qquad \text{(H)}$$

$$A_m = -\frac{i}{N_0 \sin \lambda_m}\sum_{p=1}^{n_1} \bar{\phi}_1(p) \cdot \cosh k_m(z_p + h) \cdot \Delta z_p \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta z_p &= \frac{1}{2}\left(z_{p+1} - z_{p-1}\right) \\ N_0 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \\ N_m &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2k_m h}{\sin 2k_m h}\right) \end{aligned}\right\}$$

將(H)及(I)式的A_0及A_m代入(E)式，得在假想邊界線 $\overline{BC}$ 上 ϕ_1 及 $\bar{\phi}_1$ 間的關係如下式

$$\phi_1(p) = 2\frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh kh} + \sum_{r=1}^{n_1} f(r, p)\bar{\phi}_1(r) \cdot \Delta z_r \qquad \text{(J)}$$

$$f(r, p) = i\frac{\cosh k(z_r + h)\cosh k(z_p + h)}{N_0 \sinh kh \cosh kh} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos k_m(z_r + h)\cos k_m(z_p + h)}{N_m \sin k_m h \cos k_m h} \qquad \text{(K)}$$

將上式以下列矩陣形式表示

$$\{\phi_1\} = \{Z\} + [F]\{\bar{\phi}_1\} \qquad \text{(L)}$$

$$Z = 2\frac{\cosh k(z_j + h)}{\cosh kh}$$

$$F = f(i, j)\Delta z_j \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n_1)$$

(L)式是假想邊界線$\overline{CD}$上勢函數及導函數值的1次關係式。

(2)　等水深透過波領域的速度勢函數

同理，等水深透過波領域(Ⅲ)勢函數可以下式表示

$$\varphi_2(x, z) = B_0 e^{-ik'(x-\ell')}\frac{\cosh k'(z + h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k'_n(x-\ell')}\frac{\cos k'_n(z + h')}{\cos k'_n h'} \qquad \text{(M)}$$

第1項表示透過波，第2項級數項表示散射波，ℓ'表示假想邊界線$\overline{C'D'}$至原點o距離，k'及k'_n分別為下列分散關係式的根

$$k'h' \tanh k'h' = -k'_n h' \tanh k'_n h' = \sigma^2 h' / g \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \text{(N)}$$

假想邊界線$\overline{C'D'}$上勢函數及其向x負方向導函數值，可以下式表示

$$\varphi_2(-\ell', z) = B_0 \frac{\cosh k'(z+h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} B_m \frac{\cos k'_n(z+h')}{\cos k'_n h} \qquad (\mathrm{O})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_2(-\ell', z) = -ik'B_0 \frac{\cosh k'(z+h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n k'_n \frac{\cos k'_n(z+h')}{\cos k'_n h'} \qquad (\mathrm{P})$$

$\overline{D'C'}$上同理可得

$$B_0 = \frac{i}{N'_0 \sinh k'h'} \sum_{q=1}^{n_3} \bar{\phi}_3(q) \cosh k'(z_q + h') \cdot \Delta z_q \qquad (\mathrm{Q})$$

$$B_n = \frac{i}{N'_n \sin k'_n h'} \sum_{q=1}^{n_3} \bar{\phi}_3(q) \cos k'_n(z_q + h') \cdot \Delta z_q \qquad (\mathrm{R})$$

$$\phi_3(q) = \sum_{s=1}^{n_3} f'(s,q) \bar{\phi}_3(s) \cdot \Delta z_s \qquad (\mathrm{S})$$

$$f'(s,q) = i \frac{\cosh k'(z_s + h') \cosh k'(z_q + h')}{N_0 \sinh k'h' \cosh k'h'}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos k'_n(z_s + h') \cos k'_n(z_q + h')}{N_n \sin k'_n h' \cos k'_n h'}$$

$$N'_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2k'h'}{\sinh 2k'h'}\right), \quad N'_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2k'_n h'}{\sin 2k'_n h'}\right)$$

將(S)式以下列矩陣形式表示

$$\{\phi_1\} = [F']\{\bar{\phi}_1\} \qquad (\mathrm{T})$$

$$F' = f'(i,j) \cdot \Delta z_j \quad (i, j = 1, 2, \cdots n_3)$$

(T)式是假想邊界線$\overline{C'D'}$上勢函數及導函數值的1次關係式。