3維邊界元素法四邊形一定元素

滿足3維Laplace方程式基本解ϕ^*為

$$\phi^* = 1/(4\pi r)$$

邊界面A_1的邊界條件為$\phi = q$，A_2的邊界條件為$\partial\phi/\partial n = \bar{\phi} = \bar{q}$，全邊界A＝$A_1 + A_2$的邊界積分方程式如下

$$\frac{1}{2}\phi_i + \int_A \phi\bar{\phi}^* \, dA = \int_\Gamma \bar{\phi}\phi^* dA$$

假定四邊形元素內函數值為定值，以元素重心或兩對角線交點作為節點，其函數值作為該元素代表值，將上式所示邊界積分方程式離散成下列和分方程式

$$\frac{1}{2}\phi_i + \sum_{j=1}^{n}\phi_j \int_{A_j} \bar{\phi}^* \, dA = \sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}_j \int_{A_j} \phi^* dA \qquad \text{(A)}$$

上式對特定點i成立，式中

$$\int_{A_j} \bar{\phi}^* \, dA$$

表示節點i與被積分元素j間有關的積分，將此積分以下式表示

$$\hat{H}_{ij} = \int_{A_j} \bar{\phi}^* dA$$

同樣令

$$G_{ij} = \int_{A_j} \phi^* d\Gamma$$

(A)式可寫成下列矩陣形式，表示邊界面勢函數ϕ與其法線方向導函數$\bar{\phi}$間的關係式。

$$\Phi = K\overline{\Phi}$$

$$K = H^{-1}G$$

$$H = H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & i = j \end{cases}$$

$$G = G_{ij}$$

$$\mathrm{H}_{ij}=\int_{A_j}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}dA=-\int_{A_j}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}dA$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{x_j-x_i}{r}\left(\dfrac{\partial x}{\partial n}\right)_j+\dfrac{y_j-y_i}{r}\left(\dfrac{\partial y}{\partial n}\right)_j+\dfrac{z_j-z_i}{r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial n}\right)_j\right]A_j & (i\neq j)\\ 0 & (i=j)\end{cases}$$

$$\mathrm{G}_{ij}=\int_{A_j}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}dA$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r}A_j & (i\neq j)\\ \sqrt{\dfrac{\alpha_j}{\pi A_j}} & (i=j)\end{cases}$$

$$\hat{}\; r=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}$$

$$\alpha_j=\frac{\int_0^{2\pi}a(\theta)d\theta}{2\sqrt{\pi A_i}}$$

$a(\theta)$表示該元素中點至周邊任意一點的距離，α_j表示該元素形狀修正係數，元素形狀為圓形時$\alpha=1$，正方形元素$\alpha=0.9945$。

回分類索引　回海洋工作站