2維邊界元素法一定元素

邊界Γ_1邊界條件為$\phi = q$，Γ_2邊界條件為$\partial\phi/\partial n = \bar{\phi} = \bar{q}$，全邊界$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$的邊界積分方程式如下

$$\frac{1}{2}\phi_i + \int_\Gamma \phi\bar{\phi}^* \, d\Gamma = \int_\Gamma \bar{\phi}\phi^* \, d\Gamma \qquad \text{(A)}$$

各元素中央節點值作為代表值，可將上式離散成下列和分方程式

$$\frac{1}{2}\phi_i + \sum_{j=1}^{n}\phi_j \int_{\Gamma_j} \bar{\phi}^* \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}_j \int_{\Gamma_j} \phi^* d\Gamma \qquad \text{(B)}$$

上式對特定點i成立，式中

$$\int_{\Gamma_j} \bar{\phi}^* \, d\Gamma$$

載滿珠寶的駱駝

表示節點i與被積分元素j間有關積分，將此積分以H_{ij}表示如下

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \bar{\phi}^* d\Gamma$$

同樣令

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \phi^* d\Gamma$$

(B)式可寫成下列離散化形式

$$\frac{1}{2}\phi_i + \sum_{j=1}^{n}\phi_j H_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}_j G_{ij} \qquad \text{(C)}$$

i係對全部邊界成立，故可得n個方程式。令

$$\begin{cases} H_{ij} = H_{ij} & (i \neq j) \\ H_{ij} = H_{ij} + \frac{1}{2} & (i = j) \end{cases}$$

阿拉丁神燈

將(C)式以下列矩陣形式表示。

載滿貨品的驢子

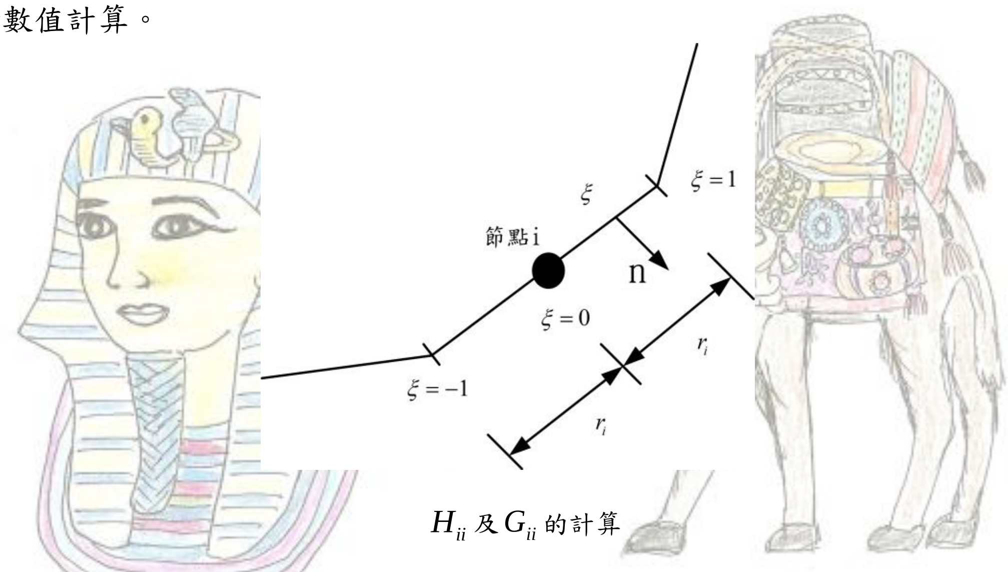
$$\mathrm{H}\Phi = \mathrm{G}\bar{\Phi}$$

即

$$\Phi = \mathrm{H}^{-1}\mathrm{G}\bar{\Phi} = \mathrm{K}\bar{\Phi}$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{H}^{-1}\mathrm{G}$$

上式表示ϕ與$\bar{\phi}$間的1次關係式，將邊界條件代入，即可解得ϕ或$\bar{\phi}$值。計算上式時，重點在於如何計算G_{ij}及H_{ij}值，以下說明如何應用Gauss積分公式進行數值計算。



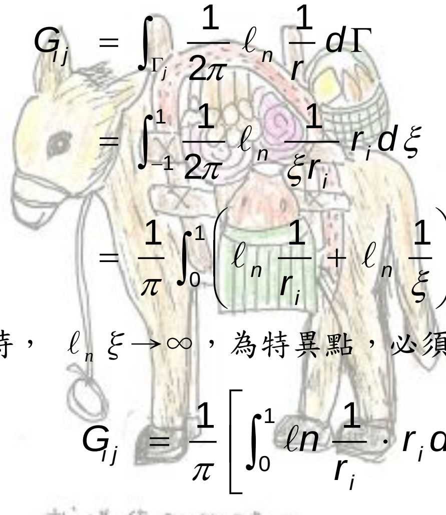
H_{ii} 及 G_{ii} 的計算

(a) i＝j時

如上圖，由於法線n與Γ(＝r)成直交，得

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\,\ell_n \frac{1}{r}\right) d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \frac{-1}{2\pi}\cdot\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, d\Gamma$$

計算G_{ij}時，導入無因次座標ξ（$-1\leqq\xi\leqq1$），為便於計算，令元素長度為$2r_1$，則



$$G_{ij} = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{2\pi}\,\ell_n \frac{1}{r}\, d\Gamma$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2\pi}\,\ell_n \frac{1}{\xi r_i}\, r_i\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\ell_n \frac{1}{r_i} + \ell_n \frac{1}{\xi}\right) r_i\, d\xi$$

$\xi\to0$時， $\ell_n\,\xi\to\infty$，為特異點，必須以下述方法計算

$$G_{ij} = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^1 \ell n \frac{1}{r_i}\cdot r_i\, d\xi + \lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 r_i\, d\xi\right]$$

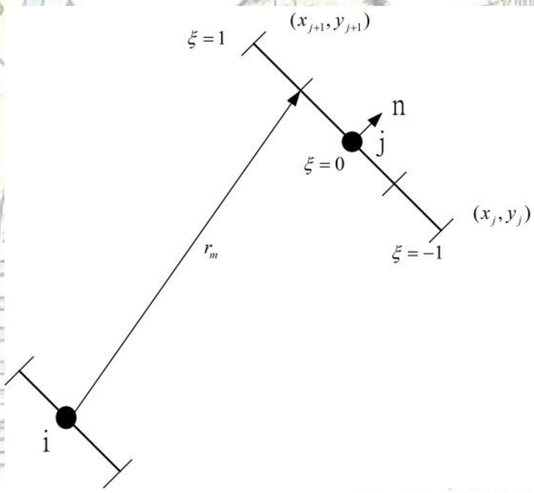
由於

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 \ell_n \frac{1}{\varepsilon} d\xi = \lim_{\varepsilon\to0}\left[\xi\left(\ell_n \frac{1}{\xi}+1\right)\right]_\varepsilon^1 = 1$$

得

$$G_{ij} = \frac{r_i}{\pi}\left[\ell_n \frac{1}{r_i} + 1\right]$$

由上可知，在i＝j處，H_{ij}及G_{ij}均可以解析方法計算。



H_{ij}及G_{ij}計算

(b) i≠j時

如上圖，導入無因次座標ξ，為使其能適用於Gauss積分公式，令ξ從-1變化至1。對Gauss積分公式，積分點以ξ_m表示，該點的權為w_m時

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \sum_{m=1}^{k} f(\xi_m) w_m$$

k為積分點數。故得

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{k} \ell n \frac{1}{r_m} w_m \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2 + (y_{j+1}-y_j)^2}$$

r_m表示i點至積分點間距離，(x_j，y_j)及(x_{j+1}，y_{j+1})為被積分元素e_j兩端座標。

$\frac{1}{2}\sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2 + (y_{j+1}-y_j)^2}$ 項，係因Gauss積分公式積分範圍為-1～1，作座標變換時產生的項。同理得

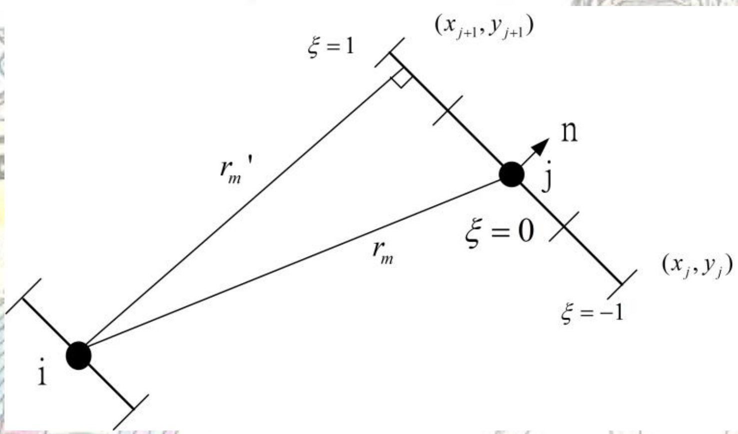
$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{k} \ell_n \frac{\partial}{\partial n}\left(\ell_n \frac{1}{r_m}\right) w_m \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2 + (y_{j+1}-y_j)^2}$$

由於

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\ell_n \frac{1}{r_m}\right) = -\frac{1}{r_m}\frac{\partial r_m}{\partial n}$$

如下圖，令r_m'表示點i至元素e_j的垂直線長，則

$$-\frac{1}{r_m}\frac{\partial r_m}{\partial n}=-\frac{r_m'}{r_m^2}$$



r_s'計算

得

$$H_{ij}=\frac{-1}{2\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{r_m'}{r_m^2}w_m\cdot\frac{1}{2}\sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2+(y_{j+1}-y_j)^2}$$

$$r_m'=(x_i-x_j)\sin\alpha-(y_i-y_j)\cos\alpha$$

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}$$

利用上述數值計算，確定邊界上ϕ及$\bar{\phi}$值，領域內任意1點的ϕ值可以下列離散化和分方程式表示

$$\phi(\vec{x})=\sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}_j G_{xj}-\sum_{j=1}^{n}\phi_j H_{xj}$$

計算G_{xj}及H_{xj}，只需要將G_{ij}及H_{xj}式中i點座標，以領域內計算點座標(x，y)取代即可。

回分類索引　回海洋工作站