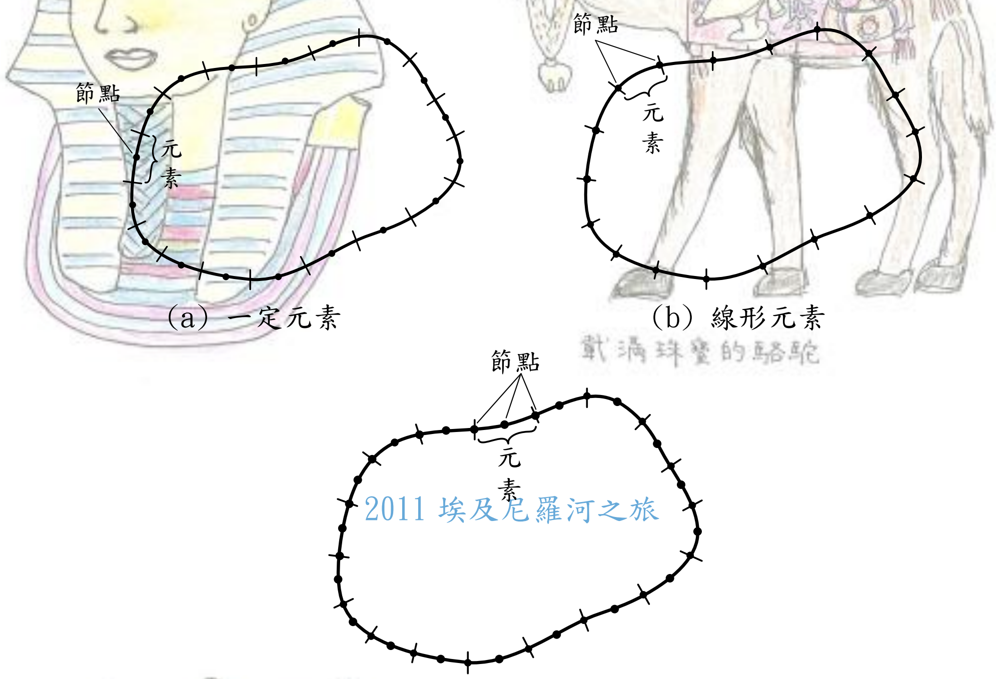
邊界元素法 1 維元素

對2維問題，如下圖，將邊界分割成N個邊界元素，作為計算該元素未知值的點稱為節點。如圖(a)，對各元素假定該元素值一定，以該區間中央點值作為代表值者，稱為一定元素。如圖(b)，每元素兩端設節點，假定其間值作線性變化者稱為線性(1次)元素。如圖(c)，為能更準確表示邊界形狀，除在元素兩端設節點外，在元素中央點設立1個節點者稱為2次元素。元素內節點超過1點以上者稱為高次元素。



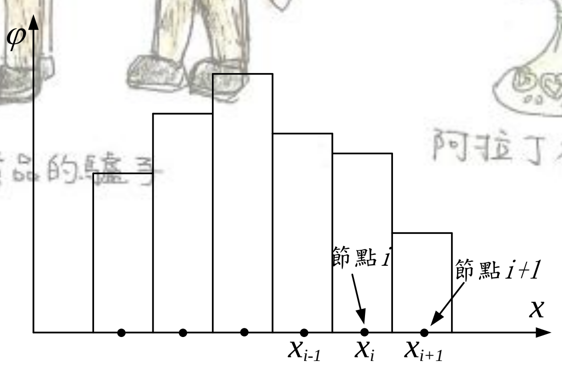
(a) 一定元素　(b) 線形元素

(c) 2次元素

離散元素種類

(1) 一定元素（constant element）

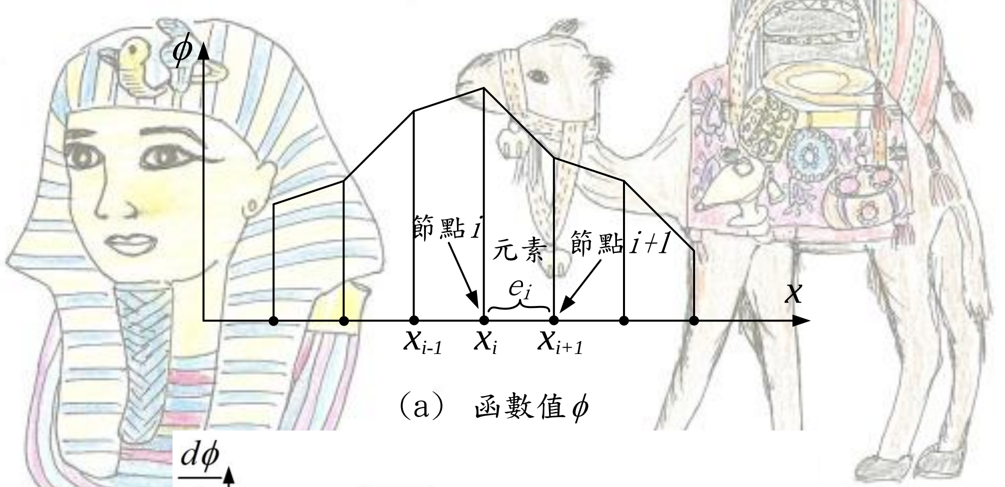
如下圖，沿線分方向取x座標，將邊界分割成若干個元素。對元素 e_i 內函數值，假定為一定，以節點 x_i 上值作為代表值，此分割非常單純，但是必須注意採取此種一定元素時，元素內導函數值為0。



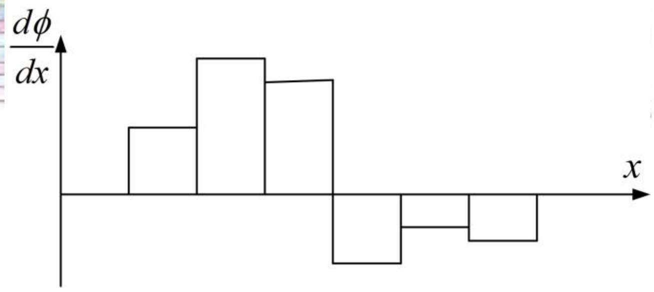
一定元素

（2）線形元素（linear element）

如下圖，元素e_i兩端節點i及i+1座標分別以x_i及x_{i+1} 表示，兩節點函數值分別以ϕ_i及ϕ_{i+1}表示，元素任意點ϕ值為ϕ_i及ϕ_{i+1}之線性函數，此種元素稱為線性元素。



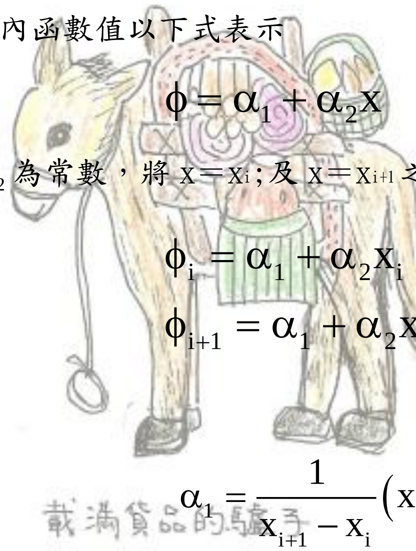
（a） 函數值ϕ



（b）導函數值 $\partial\phi/\partial x$

線形元素

元素e_i內函數值以下式表示



$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

α_1及α_2為常數，將$x = x_i$;及$x = x_{i+1}$之ϕ值代入上式得

$$\left.\begin{aligned}\phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ \phi_{i+1} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{i+1}\end{aligned}\right\}$$

即

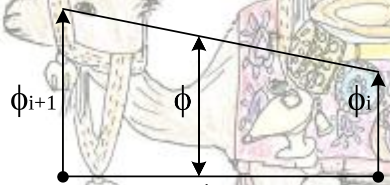
$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\left(x_{i+1}\phi_i - x_i\phi_{i+1}\right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\left(-\phi_i + \phi_{i+1}\right)\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

得

$$\phi = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i}\phi_i + \frac{x - x_i}{\Delta x_i}\phi_{i+1}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

在此應注意，對線性元素，如上圖(b)，元素內函數ϕ導函數為定值。



節　　點	i+1	元 素 e_i	i
全體系座標(x)	x_{i+1}		x_i
元素無次度座標(x)	1		0

元素無因次座標

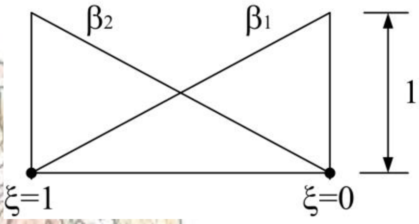
如上圖，將全體座標系(x)的元素e_i變換成元素無因次座標(ξ)。即導入，x_i處ξ＝0，x_{i+1}處ξ=1的無因次座標ξ，則ξ與x間有下列關係

$$\xi = \frac{x - x_i}{\Delta x_i}$$

(A)式可改寫成

$$\phi = \beta_1\phi_i + \beta_2\phi_{i+1} \qquad \text{(B)}$$

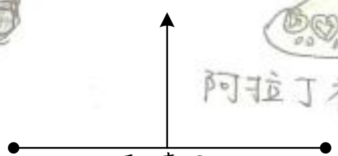
$$\beta_1 = 1 - \xi，\beta_2 = \xi$$



形狀函數

β_1及β_2稱為形狀函數(內插函數)，形狀函數在元素內作如上圖所示變化。

線性元素無因次座標ξ除上述表示法外，尚有其他表示方法，如下圖，在x_i處令ξ＝-1，x_{i+1}處ξ＝1



節　　點	i+1	元 素 e_i	i
全體系座標(x)	x_{i+1}	$\frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$	x_i
元素無次度座標(x)	1	0	-1

線形元素另一種無因次座標

則ξ與x間有下列關係

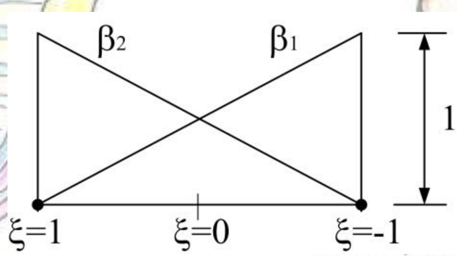
$$\xi=\frac{2x-x_{i+1}-x_i}{\Delta x_i}$$

即

$$\phi=\beta_1\phi_i+\beta_2\phi_{i+1} \qquad (C)$$

$$\beta_1=\frac{1}{2}(1-\xi)，\beta_2=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

β_1及β_2在元素內，作如下圖所示變化，本無因次座標在應用Gauss積分公式時非常有效。



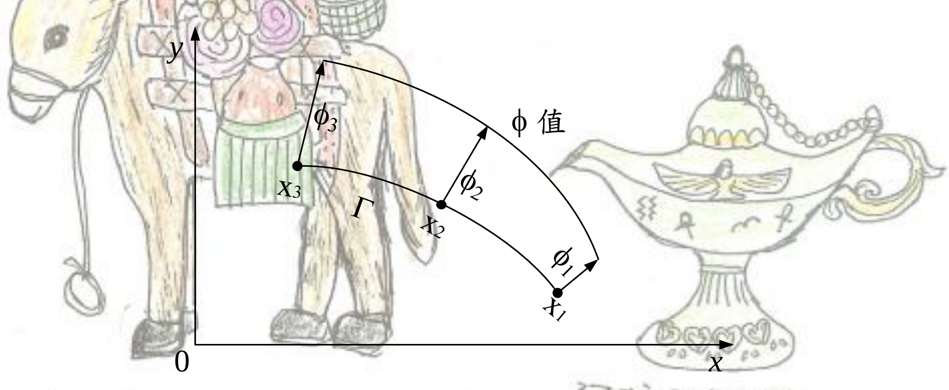
另一種形狀函數

將(B)及(C)式以矩陣表示，得

2011 埃及尼羅河之旅

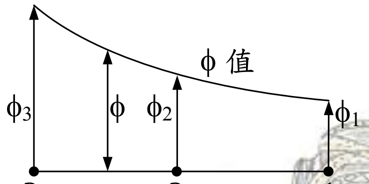
$$\phi=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_{i+1}\end{Bmatrix}$$

(3)　2次元素（quadratic element）



2次元素圖

欲使函數在各元素內作2次函數變化時，元素形狀本身亦必須以2次函數近似。此時除必須在元素兩端設2節點外，需在元素中間另增設1個節點，此種元素稱為2次元素。元素e_i兩端及中間點，如上圖，對全體座標系之座標分別為$\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$及$\vec{x}_3$。



節　　點	3	2	1
全體系座標(x)	x_3	x_2	x_1
元素無次度座標(x)	1	0	-1

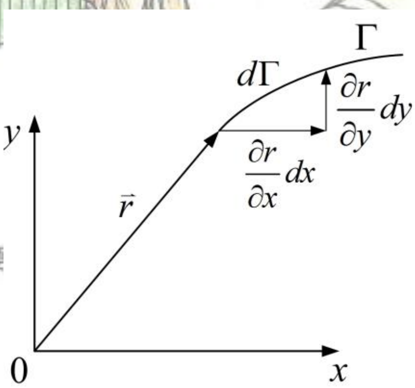
2次元素無因次座標

將元素e_i如上圖，轉換成無因次座標ξ(-1≤ξ≤1)，在$\bar{x}_1$處ξ＝-1，$\bar{x}_2$處ξ＝0，$\bar{x}_3$處ξ＝1。各節點之函數值分別以ϕ_1，ϕ_2，及ϕ_3表示，元素e_i內任意點之ϕ值可以下式表示

$$\phi(\xi)=\beta_1\phi_1+\beta_2\phi_2+\beta_3\phi_3=(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=\frac{1}{2}\xi(\xi-1)\\ \beta_2&=\frac{1}{2}\xi(1+\xi)\\ \beta_3&=(1-\xi)(1+\xi)\end{aligned}\right\} \qquad \text{(D)}$$

由於積分係沿邊界進行，但是ϕ為ξ的函數，作邊界積分時，必須如下圖，將對邊界積分計算轉換成為對無因次座標ξ積分。



曲線邊界的幾何定義圖

此時可應用下式所示2維Jacobian

$$|G| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\Gamma}{d\xi}$$

轉換成

$$d\Gamma = |G| d\xi$$

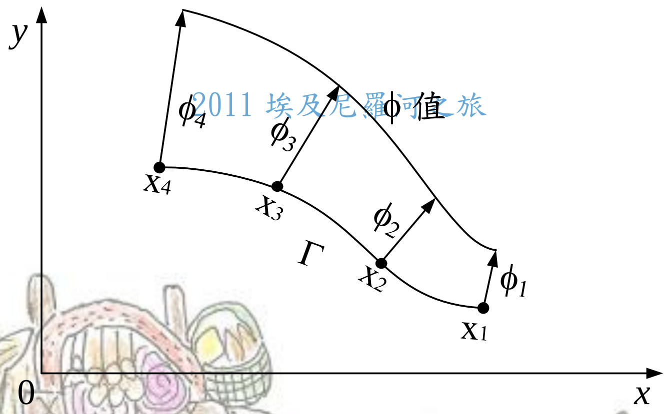
計算(D)式，在邊界必須計算x，y座標對ξ的導函數，以與表示邊界元素上函數值相同方法表示，可求得導函數，即x，y分別以下式表示

$$\left.\begin{aligned} x &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\ y &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 \end{aligned}\right\}$$

（4）高次元素（higher-order element）

高次元素亦可以同樣方法構成，3次元素如下圖

載滿珠寶的駱駝



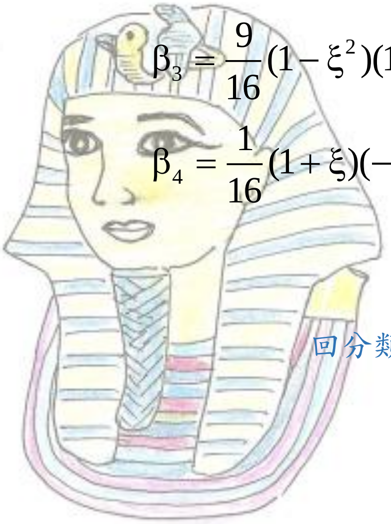
3次元素

$$\phi = \beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 + \beta_3\phi_3 + \beta_4\phi_4 = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4)\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{16}(1-\xi)(-10+9(\xi^2+1)) \\
\beta_2 &= \frac{9}{16}(1-\xi^2)(1-3\xi) \\
\beta_3 &= \frac{9}{16}(1-\xi^2)(1+3\xi) \\
\beta_4 &= \frac{1}{16}(1+\xi)(-10+9(\xi^2+1))
\end{aligned}
$$



回分類索引　回海洋工作站

載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈