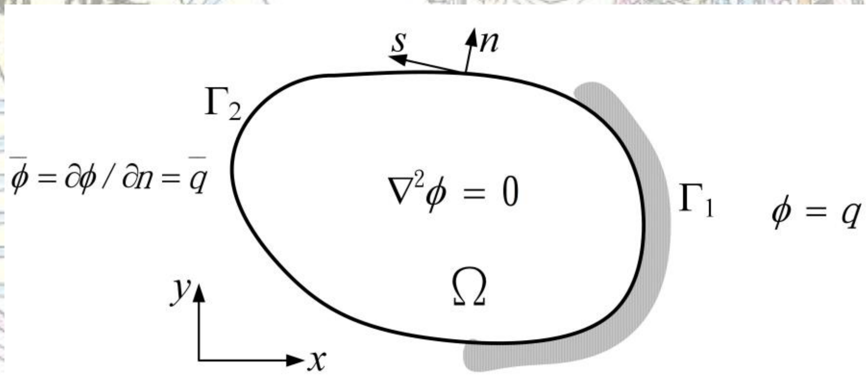
邊界元素法

1. Green函數法

英國物理數學家Green於19世紀推導出Green's function及Green's theorem。利用Green函數解析偏微分方程式的方法稱為Green函數法，是邊界元素法的起始。井島(1976)應用Green函數解析2維有限水深域波浪問題。本文以支配方程式為Laplace方程式的問題為例進行說明。



如上圖所示，封閉領域Ω受下列Laplace方程式支配

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad \text{在}\Omega\text{領域}$$

其邊界分成Γ_1及Γ_2等2部分，邊界條件如下

$$\phi = q \qquad \text{在}\Gamma_1\text{上}$$

$$\bar{\phi} = \partial\phi / \partial n = \bar{q} \qquad \text{在}\Gamma_2\text{上}$$

在Γ_1的邊界上有$\varphi = q$的條件稱為基本邊界條件。在Γ_2的邊界上有$\partial\phi / \partial n = \bar{q}$的條件稱為自然邊界條件。

作為滿足上述條件問題的Green函數φ^*，必須滿足下列條件。

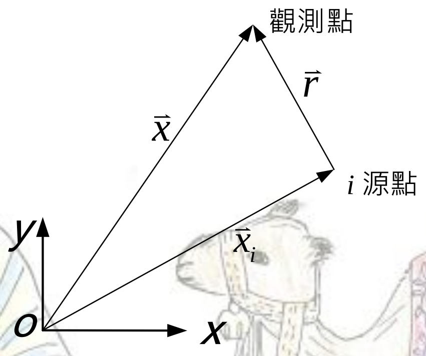
$$\nabla^2\phi^* + \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = 0 \quad \text{或} \quad \nabla^2\phi^* + \delta_i = 0 \qquad \text{在}\Omega\text{領域} \qquad (1)$$

$$\phi^* = 0 \qquad \text{在}\Gamma_1\text{上}$$

$$\bar{\phi}^* = \partial\phi^* / \partial n = 0 \qquad \text{在}\Gamma_2\text{上}$$

n為邊界向外法線，如下圖所示，點$\vec{x}_i$為源點，此點具有Delta函數特異性，$\vec{x}$為觀測點，則函數ϕ^*為源點與觀測點間距離的函數，其距離可以下式表示

$$r = |\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{x}_i| \qquad (2)$$



在無限領域的Green函數，稱之為基本解。對基本解加上其他任意函數ϕ之權，具有下列性質

$$\int_\Omega (\nabla^2\phi^*)\phi d\Omega = -\int_\Omega \delta_i \phi d\Omega = -\phi_i$$

即

$$\int_\Omega (\nabla^2\phi^*)\phi d\Omega = -\phi_i \qquad (3)$$

ϕ_i為受單位勢作用點之未知函數ϕ值。對上式左邊依Guass 定理作 2 次部分積分，得

$$\phi_i = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*) d\Gamma$$

上式表示封閉領域內任意 1 點 i 上 φ 值，與邊界線Γ上φ及$\bar{\phi}$值有關，以上過程有人稱之為「邊界法」。對 3 維均質介質，(1)式的基本解為

$$\phi^* = \frac{1}{4\pi r} \qquad (4)$$

欲證明上式為所求基本解，只須將(1)式以下式所示球座標系考量即可

$$\frac{\partial^2\phi^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi^*}{\partial r} + \delta_i = 0 \qquad (5)$$

對不為 0 的任意 r 值，將(4)式代入(5)式，即可發現ϕ^*滿足支配方程式，當 r=0 時會產生特異性。為調查 r→0 時的特性，考慮包圍勢作用點 i 小球，評估其積分，討論依Gauss 定理所表示下列方程式

$$\int_{\Omega_e} \nabla^2\phi^* d\Omega = \int_{\Gamma_e} \frac{\partial\phi^*}{\partial r} d\Gamma$$

Ω_e及Γ_e分別表示包圍源點的球體積及表面，將(2)式代入上式右邊得

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial\phi^*}{\partial r} d\Gamma = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_e}\left(-\frac{1}{r^2}\right) d\Gamma_e = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi r^2}{r^2}\right)_{\Gamma_e} = -1$$

表示當r→0時，與距離無關，球的勢積分值會趨近於1，即表示為單位源強度。2 維介質，Laplace 方程式基本解為

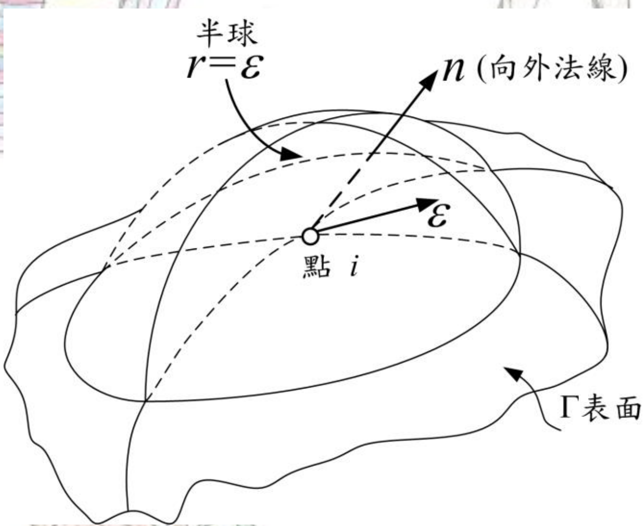
$$\phi^* = \frac{1}{2\pi}\ell_n\frac{1}{r}$$

2.　邊界積分方程式

已知封閉邊界上函數值及其法線方向導函數值時，領域內任意 1 點的函數值如上述，可依下式求得

$$\phi_i = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*) d\Gamma \tag{6}$$

因此首先必要討論將點 i 取於邊界上時的狀況，下述係對圓滑邊界進行解析。



半球內邊界點

如上圖，考慮2維領域上某1點之半球，以該點為圓心，半徑為 ε ，當 $\varepsilon \to 0$時，該點即為邊界點。將上式右邊第1項的邊界Γ ，分成下列2部份

$$\int_\Gamma \phi\bar{\phi}^* d\Gamma = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \phi\bar{\phi}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi\bar{\phi}^* d\Gamma$$

討論右邊第2項，將基本解代入$\bar{\phi}^*$可得

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \phi\bar{\phi}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} \phi\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\Gamma$$

由於半球表面積為 $2\pi\varepsilon^2$ ，對上式取極值，即當 $\varepsilon \to 0$ 時，取$\phi \to \phi_i$ ，得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(-\phi\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\right)d\Gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}\phi_i\right) = -\frac{1}{2}\phi_i$$

由於ε變為0，邊界$\Gamma_{2-\varepsilon}$式可以Γ_2表示，即積分為包含特異點之積分。對(6)式右邊第2項作同樣計算，由於

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\bar{\phi}\phi^* d\Gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\bar{\phi}\frac{1}{4\pi\varepsilon}d\Gamma = 0$$

即無特異性發生，將上項結果代入(A)式得

$$\frac{1}{2}\phi_i = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*)d\Gamma$$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$，在$\Gamma_1$上$\phi = q$，$\Gamma_2$上$\bar{\phi} = \bar{q}$。

上式表示因考量基本解特異性，求得邊界上的邊界積分方程式。上項解析對2維問題同樣可適用，可得同樣結果。

3. Helmholtz方程式基本解應用

領域Ω內，函數ϕ滿足下列Helmholtz方程式

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \qquad (7)$$

k^2表示正值常數，其邊界條件為

$$\left.\begin{array}{ll}\Gamma_1\text{上}, & \phi = q \\ \Gamma_2\text{上}, & \bar{\phi} = \partial\phi/\partial n = \bar{q}\end{array}\right\} \qquad (8)$$

全邊界$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$，權函數為$\phi^*$時，對(7)式，作如上述邊界法同樣演算得

$$\int_\Omega (\nabla^2\phi + k^2\phi)\phi^* d\Omega = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*)d\Gamma + \int_\Omega \phi(\nabla^2\phi^* + k^2\phi^*)d\Omega = 0$$

即

$$\int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*)d\Gamma + \int_\Omega \phi(\nabla^2\phi^* + k^2\phi^*)d\Omega = 0 \qquad (9)$$

ϕ^*為Helmholtz方程式基本解，滿足下列方程式

$$\nabla^2\phi^* + k^2\phi^* + \delta_i = 0 \qquad (10)$$

2維問題(時間函數以exp(-iσt)表示)

$$\phi^* = -\frac{1}{4}H_0^{(1)}(kr) \qquad (11)$$

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr)$$

r表示源點至特定點間距離，J_0為第1種Bessel函數，Y_0為第2種Bessel函數，$H_0^{(1)}$

稱為0次第1種Hankel函數

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \frac{i}{4} H_1^{(1)}(kr)$$

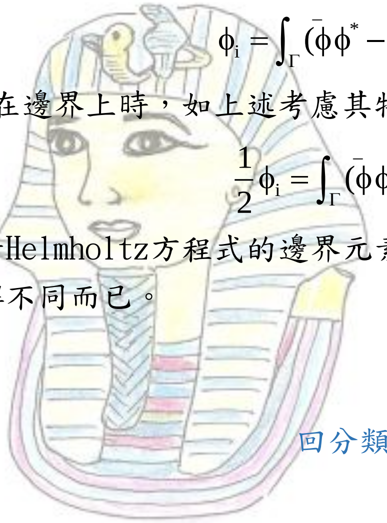
$H_1^{(1)}$ 表示1次第1種Hankel函數。將(11)式代入(9)式得

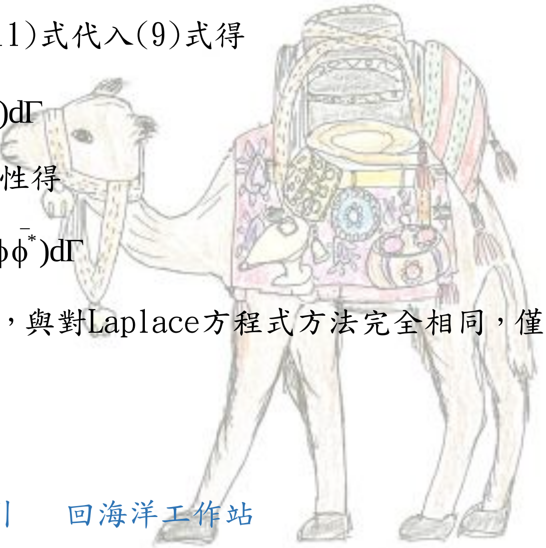
$$\phi_i = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*) d\Gamma$$

點i在邊界上時，如上述考慮其特異性得

$$\frac{1}{2}\phi_i = \int_\Gamma (\bar{\phi}\phi^* - \phi\bar{\phi}^*) d\Gamma$$

即對Helmholtz方程式的邊界元素法，與對Laplace方程式方法完全相同，僅基本解不同而已。





回分類索引　回海洋工作站

載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈