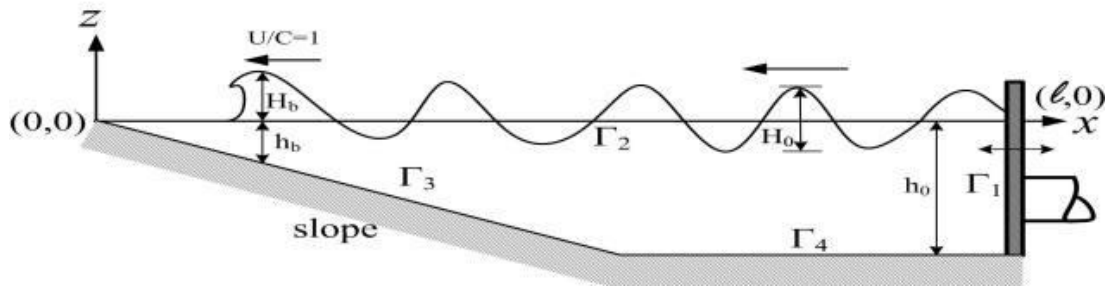


波溯上及碎波



斜坡上波變形

如上圖， x 軸以水平向右為正， z 軸以垂直向上為正，離海岸線 $x=l$ 處設
 虛擬造波板，邊界面為 Γ_1 ， Γ_2 、 Γ_3 及 Γ_4 分別表示自由水面、不透水斜坡面及
 等水深不透水底面。

載滿珠寶的駱駝

1. 理想流體強非線性波運動

非粘性非壓縮性理想流體^[1]具有速度勢 $\phi(x, z, t)$ 。靜水面取座標原點 o ，
 水平向右及垂直向上方向取 x 及 z 軸，時間及重力加速度以 t 及 g 表示。

(1) 支配方程式

速度勢 $\phi(x, z, t)$ 應滿足下列 Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

(2) 自由表面邊界條件

自由表面運動及動力邊界條件如下

$$u = \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} + g\zeta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (1.2)$$

上式是以 Lagrangian 形式表示(故得第 3 項為負)， ζ 為自由表面波形， ρ 為
 流體密度， p 為作用於自由表面的壓力。

(3) 假想邊界面及消波岸壁邊界條件

假想邊界面或防波堤或岸壁具有任意反射率 K_r 時，消能係數 α 可以下式
 定義

$$\alpha = \sqrt{1 - K_r^2}$$

得下列消波防波堤或岸壁上 ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的關係

$$\bar{\phi} = i \alpha \phi$$

$\bar{\phi}$ 表示速度勢在向外法線方向的導函數。反射率 K_r 等於 1 時，消能係數 α 等於 0，表示岸壁全反射無消能效果。 K_r 等於 0 時表示無反射波全通過。本文為區別假想邊界面與消波岸壁，將假想邊界面的消能係數以 γ 表示。

(4) 考量摩擦效應不透水海底邊界面條件

若海底面具有摩擦效應，摩擦係數為 β 時， ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的關係為

$$\bar{\phi} = i \beta \phi$$

必須依實驗決定，不考量海底摩擦時， β 等於 0。

(5) 虛擬消波透水層自由表面邊界面條件

通常水面上受大氣壓力作用恆為一定，可視為 0。在虛擬消波透水層自由表面，假定其所受壓力與流體運動的速度勢呈如下式所示比例時，會如有消波結構物存在時具有的消能效應

$$p = \mu \phi$$

μ 為虛擬消能係數，有許多構想被發表過。

2011 埃及尼羅河之旅

2. 活塞式造波板造波方程式

活塞式造波板上，造波板運動速度與水粒子對造波板法線方向 n 的流速必須相等得

$$\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = -U(t)$$

配合邊界元素法進行 2 維活塞式造波數值模擬，必須知道假想活塞式造波板運動速度，使其滿足欲模擬的波形。

(1) 簡谐波

模擬簡谐波，造波板運動速度 $U(t)$ 為

$$U(t) = \zeta_0 \sigma \frac{\sinh kh \cosh kh + kh}{2 \sinh^2 kh} \sin \sigma t$$

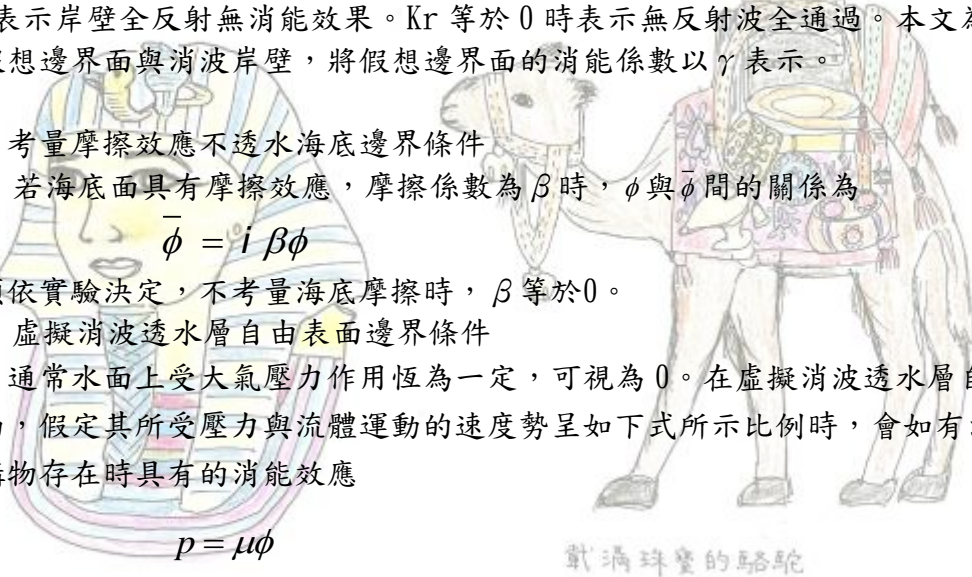
ζ_0 為造波振幅， $\sigma (= 2\pi/T)$ 為造波角週頻率， T 為造波週期， k 為波數。

(2) 孤立波

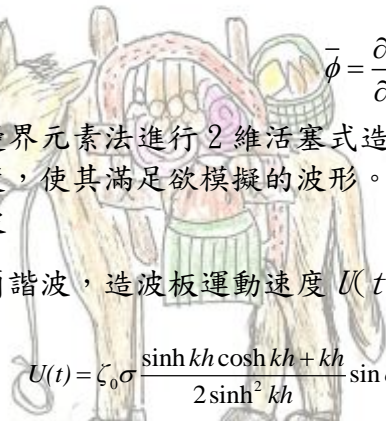
模擬孤立波，根據 Boussinesq 理論， $U(t)$ 可以表示如下

$$U(t) = x_0 \omega \operatorname{sech}^2(t - t_c)$$

$$x_0 = h_0 \sqrt{\frac{4H_0}{3(H_0 + h_0)}}$$



戴滿珠寶的駱駝



戴滿貨品的驢子



阿拉丁神燈

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h_o} \sqrt{\frac{3H_o}{4h_o} \left(1 + \frac{H_o}{h_o}\right)}}$$

$$t_c = \pi/\omega$$

x_o 為造波板半衝程， H_o 為欲造波的孤立波波高， h_o 為造波水槽水深， ω 為特徵角頻率， t_c 為特徵時間。

(3) 不規則波

模擬造波波譜為 $S(f)$ 時，造波板運動速度 $U(t)$ 為

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2df S(f_n)} \sigma_n \cos(\sigma_n t - \varepsilon_n)$$

其中 $\sigma_n = 2\pi f_n$ ， ε_n 為界於 0 與 2π 間之隨機變數。

(a) Brestsneider 波譜

$$S(f) = 0.430 \bar{H}^2 \bar{T}^4 f^{-5} \exp(-0.675 \bar{T}^4 f^{-4})$$

(b) Brestsneider-Mitsuyasu 波譜

$$S(f) = 0.257 H_{1/3}^2 / T_{1/3}^4 f^{-5} \exp(-1.03 T_{1/3}^4 f^{-4})$$

$H_{1/3}$ 及 $T_{1/3}$ 為欲模擬造波波譜的有義波高及週期。

(c) JONSWAP 波譜

2011 埃及尼羅河之旅

$$S(f) = \alpha (2\pi)^{-4} g^2 f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}\right] \gamma^{\exp\left[-\left(\frac{f}{f_p}-1\right)^2 / 2\sigma^2\right]}$$

$$\begin{cases} \sigma = 0.07 & f \leq f_p \\ \sigma = 0.09 & f > f_p \end{cases}$$

$$\alpha \approx 0.081$$

$$\gamma \approx 3.3$$

f_p 為頂點頻率

3. 邊界線上速度勢函數與導函數間的關係式

應用 2 維邊界元素法 **線性元素** 分析，將表示邊界線上 ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的關係式，以下列部份矩陣形式表示

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

3. 連立方程式

將 1~2 所示邊界條件代入上式得

$$\begin{bmatrix} -1 & k_{12} & i\beta_3 k_{13} & i\beta_4 k_{14} \\ 0 & k_{22} & i\beta_3 k_{23} & i\beta_4 k_{24} \\ 0 & k_{32} & -1 & i\beta_4 k_{34} \\ 0 & k_{42} & i\beta_3 k_{43} & i\beta_4 k_{44} - 1 \end{bmatrix}^{t+1} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}^{t+1} = \begin{Bmatrix} k_{11}U \\ k_{21}U + \phi_2 \\ k_{31}U \\ k_{41}U \end{Bmatrix}^{t+1} \quad (4.2)$$

$$\phi_2^{t+1} = \phi_2^t + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right)^2 \right] \Delta t - gz^{t+1} \Delta t \quad (4.3)$$

s 及 n 分別表示切線(逆時針為正)及向外法線， Δt 為時間差分間距，對時間逐次演算過程如下：

- ① $t=0$ 時刻，呈靜止狀態， ϕ_2^t 、 ϕ_4^t 、 ϕ_3^t 、 ϕ^{t+1} 均為 0
- ② $t=t\Delta t$ 時刻造波板運動速度為 $U(t)$ ，解(4.2)式得 ϕ_2^t ，依(4.3)式得 $(t+1)\Delta t$ 時刻的 ϕ_2^{t+1} ，從下式

$$\left. \begin{aligned} x^{t+1} &= x^t + \frac{\partial \phi^t}{\partial x} \Delta t \\ z^{t+1} &= z^t + \frac{\partial \phi^t}{\partial z} \Delta t \end{aligned} \right\} \text{埃及尼羅河之旅}$$

求得 $(t+1)\Delta t$ 時刻自由表面水粒子位置 (x^{t+1}, z^{t+1})

- ③ 對 $(t+1)\Delta t$ 時刻水面波形，重新計算(4.1)式

反覆上述②③即可。

4. 流速分佈

領域內水分子運動速度可以經由邊界上各點速度勢對 x 及 z 的偏微分求得：

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\partial \Phi(x, z; t)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\xi - x}{r^2} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left[\frac{\partial x}{\partial n} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(\xi - x)^2}{r^4} \right) + \frac{\partial z}{\partial n} \left(\frac{2(\xi - x)(\eta - z)}{r^4} \right) \right] \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{\partial \Phi(x, z; t)}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{1}{r} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\eta - z}{r^2} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left[\frac{\partial z}{\partial n} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(\eta - z)^2}{r^4} \right) - \frac{\partial x}{\partial n} \left(\frac{2(\xi - x)(\eta - z)}{r^4} \right) \right] \right\} d\Gamma$$

將上列各式以線形元素離散化，得流體領域內任意1點的x及z方向流速u及w為

$$u(t) = \frac{\partial \Phi(x, z; t)}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} \left\{ (M_1 \bar{\Phi}_j(\xi, \eta; t) + M_2 \bar{\Phi}_{j+1}(\xi, \eta; t)) \left(\frac{x - \xi}{r^2} \right) - (M_1 \Phi_j(\xi, \eta; t) + M_2 \Phi_{j+1}(\xi, \eta; t)) \left[n_x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(x - \xi)^2}{r^4} \right) - n_z \frac{(x - \xi)(z - \eta)}{r^4} \right] \right\} ds_j$$

$$w(t) = \frac{\partial \Phi(x, z; t)}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} \left\{ (M_1 \bar{\Phi}_j(\xi, \eta; t) + M_2 \bar{\Phi}_{j+1}(\xi, \eta; t)) \left(\frac{x - \eta}{r^2} \right) - (M_1 \Phi_j(\xi, \eta; t) + M_2 \Phi_{j+1}(\xi, \eta; t)) \left[n_x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(x - \eta)^2}{r^4} \right) - n_z \frac{(x - \xi)(z - \eta)}{r^4} \right] \right\} ds_j$$

2011 埃及尼羅河之旅

其中 M_1 、 M_2 為形狀函數， $M_1 = (1 - \chi)$ ， $M_2 = (1 + \chi)$ ， χ 為各元素所使用之無次度座標系。



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈