移流擴散方程式(Advective diffusion equation)

濃度為 C 的可溶解介質在流體中擴散時，對流體某固定領域Ω內，介質的質量可以下式表示

$$\int_{\Omega} C\, d\Omega$$

將其對時間微分得

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega$$

上式表示領域Ω內可溶解質量的變化率。從邊界流入的溶解質的流入率為，因移流及因擴散積分引起兩者之和，即

$$-\int \left[vC - k\frac{\partial C}{\partial n} \right] d\Gamma$$

載滿珠寶的駱駝

k 為擴散率，依可溶解質量的守恆法則，得

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega = -\int \left[vC - k\frac{\partial C}{\partial n} \right] d\Gamma$$

2011 埃及尼羅河之旅

利用發散定理將上式右邊的邊界積分轉換成領域積分，得下列移流擴散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial v_1 C}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2 C}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3 C}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial C}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial C}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k\frac{\partial C}{\partial x_3} \right) = 0$$

當擴散率 k 為一定，因連續方程式成立，得下列簡潔的擴散方程式。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_1\frac{\partial C}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial C}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial C}{\partial x_3} - k\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_3^{\,2}} \right) = 0$$

載滿貨品的驢子　　阿拉丁神燈

回分類索引　回海洋工作站