餘擺波 (trochoidal wave)

Gesnter 氏於 1802 年對深海波利用餘擺（trochoidal）曲線導出表示波形的方程式，稱之為餘擺波， Gaillard 氏(1935)則對淺海波導得其結果。
若採用 Lagrange 的方法則運動可以下式表示

$$
\begin{aligned}
x &= \bar{x} - a\,\frac{\cosh k\left(\bar{z}+h_0\right)}{\sinh\ kh_0}\,\sin(\,kx - \sigma t\,) \\
z &= \bar{z} - a\,\frac{\sinh k\left(\bar{z}+h_0\right)}{\sinh\ kh_0}\,\cos(\,kx - \sigma t\,)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

$(\bar{x},\bar{z})$ 表示水分子的平均位置，h_0 表示從 x 軸算起的水深。將上式中的時間項消去可得

$$
\frac{\left(x - \bar{x}\right)^2}{A_0^{\,2}} + \frac{\left(z - \bar{z}\right)^2}{B_0^{\,2}} = 1 \qquad (2)
$$

但

$$
\begin{aligned}
A_o &= a\,\frac{\cosh k(\bar{z}+h_o)}{\sinh kh_o} \\
B_o &= a\,\frac{\sinh k(\bar{z}+h_o)}{\sinh kh_o}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

上式表示運動係以 $(\bar{x},\bar{z})$ 為圓心, 作長軸及短軸半徑分別為 A_0 及 B_0 的橢圓運動。

由於在水面上水分子的垂直方向平均位置 $\bar{z}=0$，所以在水面上 $z=\zeta$ 上，(1) 式改寫為

$$
\begin{aligned}
x &= \bar{x} - a\coth kh_0 \sin(\,k\bar{x} - \sigma t\,) \\
\xi &= a\cos(\,k\bar{x} - \sigma t\,)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

在上式中，當 t=0 時，令 $\theta = k\bar{x}$，則可改寫成

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\theta}{k} a\coth kh_0 \sin\theta \\
\zeta &= a\cos\theta
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

上式為如圖所示橢圓餘擺曲線的方程式，在 z＝1/k 的直線下側，作半徑為 1/k 的圓轉動時，與長軸及短軸半徑分別為 $a\coth kh_o$ 及 a 的橢圓運動的交點所描

述的曲線。

當振幅 a 變小時，因 $x \approx \bar{x}$，得 $\zeta = a\cos(kx - dt)$ 即餘擺波的波形近似於正弦波的波形。