波高分布(Wave height distribution)

水面變位若可以正弦波的無限和表示，則平均水面上某一高度ζ處發生極大值的機率為$0\le\zeta<+\infty, \partial\zeta/\partial t=0, \partial^2\zeta/\partial^2 t<0$等條件同時出現時的機率。依 Cartwright 及 Longuet-Higgins 得

$$p(\zeta/\sqrt{E})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{\varepsilon\exp\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}(\zeta/\sqrt{E})^2\right]$$
$$+(1-\varepsilon^2)^{1/2}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{E}}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{E}}\right)^2\right]\int_{-\infty}^{\frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}\frac{\zeta}{\sqrt{E}}}\exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right)dx\} \tag{1}$$

E 為下式所示能量，ε^2為波譜寬度。

$$E=\overline{\zeta^2}\approx\frac{1}{2N}\sum_{m=0}^{2N-1}\zeta_m^{\ 2}\approx\sum 2|C_k|^2\approx\sum w_1(f)\,df$$

當$\varepsilon=0$時，ζ的極大值只存在於正側，在線形理論成立範圍內由於波形上下對稱，ζ的最大值為振幅，其 2 倍為波高 H 而其分布為

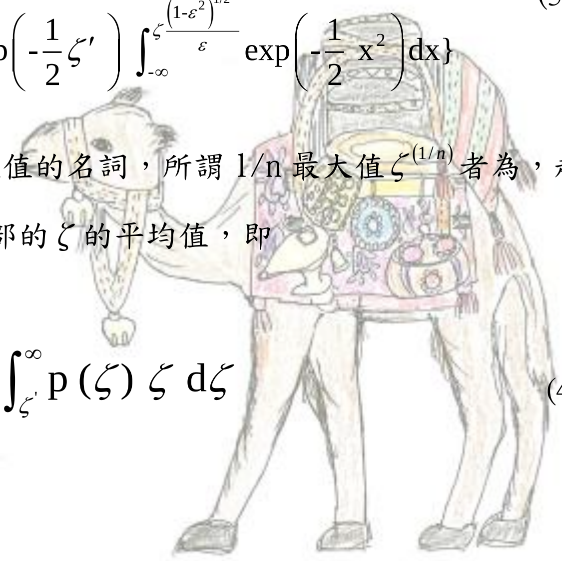
$$p\left(\frac{H}{2\sqrt{2E}}\right)=\frac{H}{2\sqrt{2E}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2\sqrt{2E}}\right)^2\right\} \tag{2}$$

上式稱為 Rayliegh 分布。當$\varepsilon\neq0$時的波高分布，目前尚無理論解。

1) 1/n 最大值

比某ζ'更大的極大值的出現機率$q(\zeta'/\sqrt{E})$為將(1)式對大於ζ'的範圍加以積分即可求得，為方便起見將$\zeta'/\sqrt{E}$以ζ'取代，則

$$q(\zeta') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{\zeta'/\varepsilon}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)dx \right.$$
$$\left. +(1-\varepsilon^2)^{1/2}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta'\right)\int_{-\infty}^{\frac{\zeta'(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{1}{2}\,x^2\right)dx\right\} \tag{3}$$



波浪統計量會使用到 1/n 最大值的名詞，所謂 1/n 最大值 $\zeta^{(1/n)}$ 者為，超過某一個 ζ' 值的機率為 1/n 時的全部的 ζ 的平均值，即

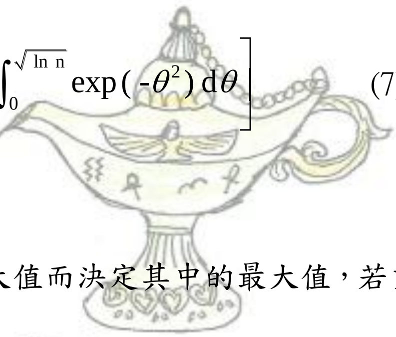
$$\zeta^{(1/n)} = \frac{1}{1/n}\int_{\zeta'}^{\infty} p(\zeta)\,\zeta\,d\zeta \tag{4}$$

而積分下限 ζ' 為

$$\frac{1}{n} = \int_{\zeta'}^{\infty} p(\zeta)\ d\zeta \tag{5}$$

通常 $\zeta^{(1/n)}$ 隨波譜寬度 ε 而變，當 $\varepsilon = 0$ 時，因波高為振幅的 2 倍得

$$H_{1/10} = 5.09\sqrt{E}\ ,\quad H_{1/3} = 4.00\sqrt{E}\ ,\quad \overline{H} = 2.51\sqrt{E} \tag{6}$$



對任意的 n，有

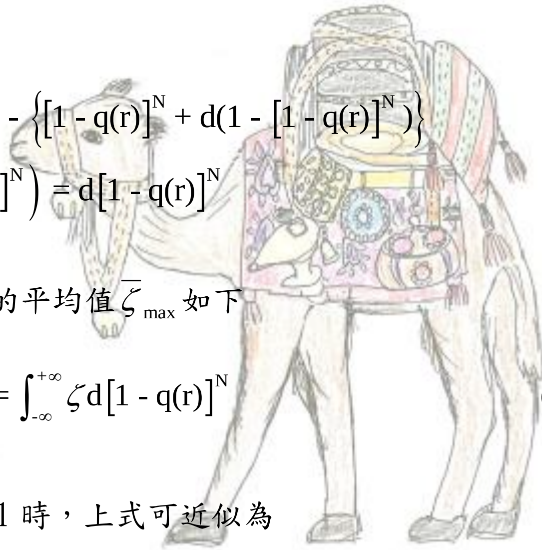
$$H_{1/n} = 2\sqrt{2\ln n} + 2n\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\sqrt{\ln n}} \exp(-\theta^2)\,d\theta\right] \tag{7}$$

2）最大極大值

從波形時間記錄的一部分中，取出 N 個極大值而決定其中的最大值，若重複若干次時，可求得最容易出現的最大值 ζ_{max} 如下。

在某次取樣中的任意一個值，其不超過某一值 r 的機率由(3)式可知應為 $1-q(r)$，N 個均為不超過 r 的機率為 $1-[1-q(r)]^N$，所以至少一個超過 r 的機率為 $[1-q(r)]^N$。

最大極大值$\bar{\xi}_{max}$在(r，r+dr)間的機率為，至少一個超過 r 的機率減去至少一個超過 r + dr 的機率，即



$$\left\{1-[1-q(r)]^N\right\} - \left\{[1-q(r)]^N + d\left(1-[1-q(r)]^N\right)\right\} = -d\left(1-[1-q(r)]^N\right) = d[1-q(r)]^N \quad (8)$$

將上述取樣重複數次後得ζ_{max}的平均值$\bar{\zeta}_{max}$如下

$$\bar{\zeta}_{max} = E[\zeta_{max}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta\, d[1-q(r)]^N \quad (9)$$

當 N 的個數極多而ε不趨近於 1 時，上式可近似為

載滿珠寶的駱駝

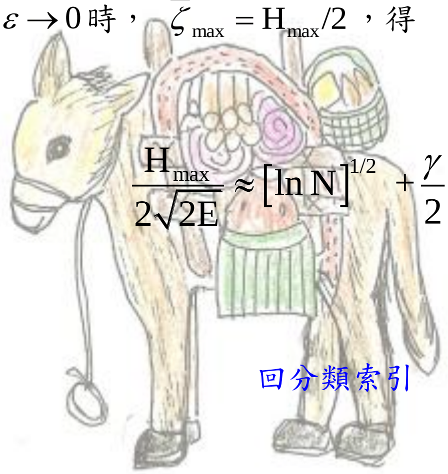
$$\frac{\bar{\zeta}_{max}/\sqrt{E}}{\left(2-\varepsilon^2\right)^{1/2}} \approx \frac{\left[\ln\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2} N + \gamma\left[\ln\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2} N\right]^{-1/2}/2\right]}{\left(1-\varepsilon^2/2\right)^{1/2}} \quad (10)$$

2011 埃及尼羅河之旅

γ=0.5772…(Euler 常數）。

當$\varepsilon \to 0$時，$\bar{\zeta}_{max} = H_{max}/2$，得

$$\frac{H_{max}}{2\sqrt{2E}} \approx [\ln N]^{1/2} + \frac{\gamma}{2}[\ln N]^{-1/2} \quad (11)$$



回分類索引　　回海洋工作站

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈