

π 定理

某物理現象可由 n 個物理量的函數關係描述，這些物理量包括有質量、長度、時間等 m 種基本因次時，可用因次分析的方法獲得 $(n-m)$ 個無因次數群。此現象的特徵可用這 $(n-m)$ 個無因次數群的關係形式表示。這即通常稱為 Buckingham 的 π 定理。

n 個變數 a_1, a_2, \dots, a_n ，若以下式結合

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

將這 n 個變數全部以 m 個基本量 (L、T、M 或 F，故 $m=3$) 表示，則 n 個變數可改寫成 $(n-m)$ 個無因次量 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ ，而將上式改寫成

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

上式通常稱為 Buckingham 的 π 定理。

決定變數時，必須從 a_1, a_2, \dots, a_n 中指定為從屬變數，其他 $(n-1)$ 個變數為獨立變數，不可以有 2 個以上的從屬變數。一般變數可分類成下列 4 種：

- ① 幾何學有關變數：長度或坡度。埃及尼羅河之旅
- ② 與流有關變數：速度、流量、壓力變化、剪力、波速、週期等。
- ③ 流體有關變數：密度、黏性係數、單位體積重量、表面張力、彈性係數等。
- ④ 土砂有關變數：粒徑、土砂密度、沈降速度、空隙率、靜止摩擦係數等。

以簡諧擺動為例，這個物理問題存在 5 個變數，即擺球質量、擺線長度、擺角、時間和重力加速度，質量、長度和時間為 3 個基本量，有 $\pi_1 = \sqrt{l / gt^2}$ 及 $\pi_2 = \theta$ 2 個獨立的無因次 π 數存在。

若以下式為例

$$f(a, b, v, \Delta p, \rho, \mu, \sigma, \Delta \gamma, e) = 0$$

$n=9$ ， π 定理的無因次量共有 $n-m=6$ 組，每組有 $m+1=4$ 個變數，3 個共通稱為反復變數 (repeating variable)，共選出 6 組無因次量，若以 a, b, ρ 為反復變數，可以以下式結合之。

$$\phi\left(\frac{b}{a}, \frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{va}{\mu / \rho}, \frac{v^2}{(\Delta \lambda / \rho)a}, \frac{v^2}{\sigma / (\rho a)}, \frac{v^2}{e / \rho}\right) = 0$$

上式中第 3 項為 Reynolds 數，第 4 項為 Froude 數，第 5 項為 Weber 數，第 6 項為 Mach 數。

例 1 噴流垂直衝擊壁面，作用於壁面的力 P 恆與噴流的截面積 a 、流速 v 及密度 ρ 有關， P 的函數形式為何。

(a) 因次分析

依題意

$$P = ka^x v^y \rho^z$$

採 [LMT] 系，因次分析為

$$[LMT^{-2}] = [(L^2)^x (LT^{-1})^y (ML^{-3})^z]$$

$$[L] : 1 = 2x + y - 3z$$

$$[M] : 1 = z$$

$$[T] : -2 = -y$$

解之得 $x=1$ ，即

2011 埃及尼羅河之旅

$$P = kav^2 \rho$$

(b) π 定理

$$f(P, a, v, \rho) = 0$$

基本因次為 [L]，[M] 及 [T]，用 a ， v ， ρ 為基本物理量，則

$$\pi_1 = a^x v^y \rho^z P$$

得

$$[L^0 M^0 T^0] = [(L^2)^x (LT^{-1})^y (MT^{-3})^z (LMT^{-2})]$$

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

解上式得 $x=-1$ ， $y=-2$ ， $z=-1$ ，即得

$$\pi_1 = \frac{P}{av^2 \rho}$$

依 π 定理得

$$\phi\left(\frac{P}{\rho v^2}\right) = 0$$

得

$$P = k\rho v^2$$

與利用因次分析所得結果一致。

例 2 溢流壩流量 Q 與溢流寬 B ，溢流水深 h 及重力加速度 g 有關， Q 的函數形式為何。

(a) 因次分析

$$Q = kB^x h^y g^z$$

因次方程式為

$$[L^3 T^{-1}] = [L^x L^y (L T^{-2})^z]$$

2011 埃及尼羅河之旅

$$[L] : 3 = x + y + z$$

$$[T] : -1 = -2z$$

解之，得

$$y = \frac{5}{2} - x$$

即

$$Q = kB^x h^{\frac{5}{2}-x} g^{\frac{1}{2}} = k\sqrt{gh} \left(\frac{B}{h}\right)^x$$

(b) π 定理

$$f(Q, B, h, g) = 0$$

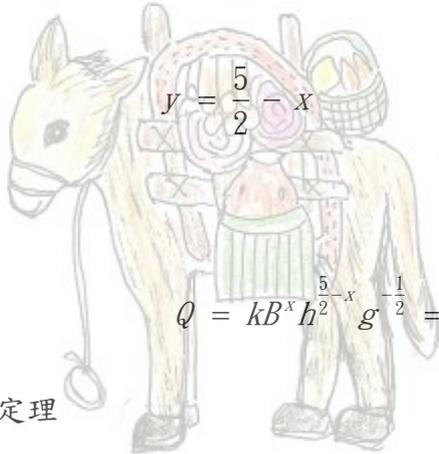
阿拉丁神燈

因有關基本因次只有 $[L]$ 及 $[T]$ 2 個，若基本物理量選定 h 及 g ，則

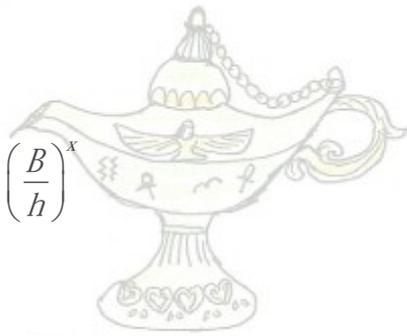
$$\pi_1 = h^x g^y B$$



載滿珠寶的駱駝



載滿貨品的驢子



因次方程式為

$$[1] = [L^x (LT^{-2})^y L]$$

解之，得 $x=-1, y=-0$ ，得

又因 $\pi_1 = \frac{B}{h}$

其因次方程式為 $\pi_2 = h^x g^y Q$

$$[1] = [L^x (LT^{-2})^y (L^3 T^{-1})]$$

解之，得 $x=-5/2, y=-1/2$ ，得

$$\pi_2 = \frac{Q}{h^2 \sqrt{gh}}$$

由 π 定理得

$$\phi\left(\frac{B}{h}, \frac{Q}{h^2 \sqrt{gh}}\right) = 0 \quad \text{埃及尼羅河之旅}$$

即

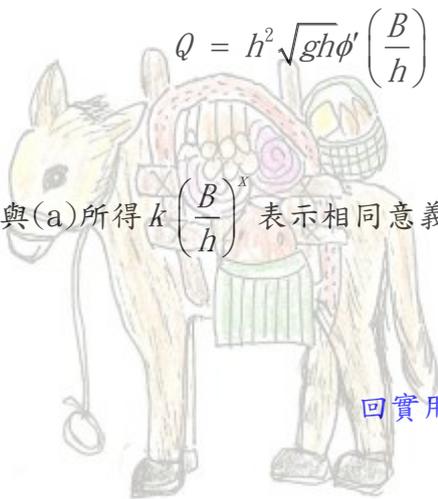
$$Q = h^2 \sqrt{gh} \phi'\left(\frac{B}{h}\right)$$

$\phi'\left(\frac{B}{h}\right)$ 與 (a) 所得 $k\left(\frac{B}{h}\right)^x$ 表示相同意義。

回實用水理學



載滿珠寶的駱駝



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈