邊界元素法應用於潮流解析

在水平面內取直角座標系(x, y), z 軸垂直向上，潮流在 x, y 方向分量為 u, v，水位的上昇量為ς時，連續方程式為

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial u(\zeta+h)}{\partial x}+\frac{\partial v(\zeta+h)}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

x, y 方向的運動方程式為

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \qquad (3)$$

將(2)及(3)式的移流項忽略得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \qquad (5)$$

將(1)式對時間微分，並將(4)式對 x 微分，(5)式對 y 微分後代入，忽略高次項得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=0 \qquad (6)$$

若假定水位作下列簡諧運動，σ 為角週頻率(=2π/T，T=週期)

$$\zeta=\zeta_o e^{(-i\sigma t)} \qquad (7)$$

則(6)式可改寫成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)+\frac{\sigma^2}{g}\zeta=0 \qquad (8)$$

將(7)式代入上式得

$$\nabla^2\zeta + k^2\zeta = -\frac{1}{h}\nabla h \cdot \nabla\zeta \qquad (9)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

將(9)式乘以加權函數 G 並積分得

$$\int G(\nabla^2\zeta + k^2\zeta)d\Omega = -\int G\frac{1}{h}\nabla h \cdot \nabla\zeta d\Omega$$

利用 Green 定理，上式可改寫成

$$\int \zeta(\nabla^2 G + k^2 G)d\Omega = \int G\frac{\partial\zeta}{\partial n}d\Gamma - \int \zeta\frac{\partial G}{\partial n}d\Gamma - \int G\frac{1}{h}\nabla h \cdot \nabla\zeta d\Omega$$

上式左邊，加權函數 G 能滿足下式

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(Q-P)$$

其基本解為

$$G = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr)$$

式中，$H_0^{(1)}$ 為第 1 類 0 次 Hankel 函數，故線性長波方程式的積分表示如下

$$\gamma\zeta = \int G\frac{\partial\zeta}{\partial n}d\Gamma - \int \zeta\frac{\partial G}{\partial n}d\Gamma - \int G\frac{1}{h}\nabla h \cdot \nabla\zeta d\Omega$$

在邊界上 γ=0.5，在領域內 γ=1。

回應用邊界元素法解析海洋擴散