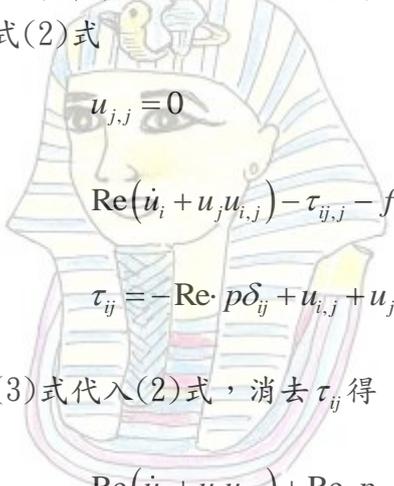


渦度及流函數

1. 渦度及輸送方程式

解析非壓縮性粘性流體所需的基本方程式為下列連續方程式(1)式及運動方程式(2)式



$$u_{j,j} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Re}(\dot{u}_i + u_j u_{i,j}) - \tau_{ij,j} - f_i = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{ij} = -\text{Re} \cdot p \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} \quad (3)$$

將(3)式代入(2)式，消去 τ_{ij} 得

$$\text{Re}(\dot{u}_1 + u_j u_{1,j}) + \text{Re} \cdot p_{,1} - u_{1,11} - u_{1,11} - u_{1,22} - u_{2,12} + f_1 = 0$$

$$\text{Re}(\dot{u}_2 + u_j u_{2,j}) + \text{Re} \cdot p_{,2} - u_{2,11} - u_{1,21} - u_{2,22} - u_{2,22} + f_2 = 0$$



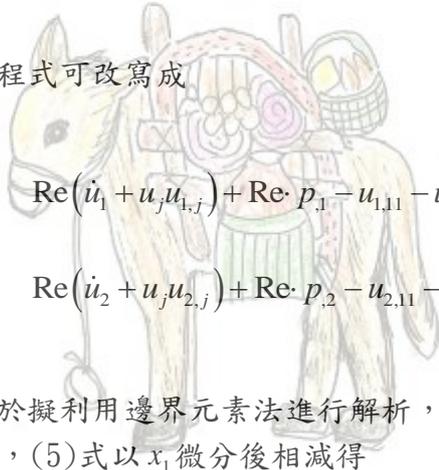
由(1)式得

2011 埃及尼羅河之旅

$$u_{1,11} + u_{2,12} = (u_{1,1} + u_{2,2})_{,1} = 0$$

$$u_{1,21} + u_{2,22} = (u_{1,1} + u_{2,2})_{,2} = 0$$

運動方程式可改寫成



$$\text{Re}(\dot{u}_1 + u_j u_{1,j}) + \text{Re} \cdot p_{,1} - u_{1,11} - u_{1,22} + f_1 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Re}(\dot{u}_2 + u_j u_{2,j}) + \text{Re} \cdot p_{,2} - u_{2,11} - u_{2,22} + f_2 = 0 \quad (5)$$



由於擬利用邊界元素法進行解析，必須將上兩式中的壓力項消去，故對(4)式以 x_2 ，(5)式以 x_1 微分後相減得

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

$$\text{Re}[(\dot{u}_{2,1} - \dot{u}_{1,2}) + u_j (u_{2,1} - u_{1,2})] - (u_{2,1} - u_{1,2})_{,jj} = -f_{2,1} \quad (6)$$

令

$$\omega = u_{2,1} - u_{1,2}$$

(6)式變成下列的渦度輸送方程式

$$\text{Re}(\dot{\omega} + u_j \omega_{,j}) - \omega_{,ij} = -f_{2,1}$$

定義流函數 ψ 如下

$$u_1 = \psi_{,2}, \quad u_2 = -\psi_{,1}$$

得到利用渦度及流函數解析流場的基本方程式為

$$\omega = -\psi_{,ij}$$

2. 流函數相關邊界條件

邊界上外向法線及切線方向的流速為

2011 埃及尼羅河之旅

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\partial \psi}{\partial s} = \psi_{,s}, \\ u_s &= -\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\psi_{,n} \end{aligned} \quad (7)$$

對固定非滑動的邊界，流速為 0，得

$$\begin{aligned} u_n = \psi_{,s} &= 0 \\ u_s = -\psi_{,n} &= 0 \end{aligned}$$

即沿邊界，流函數為一定。

對孔蝕，在邊界的切線方向(順時針)已知流速 u_0 時，流速等於流函數在法線方向的傾度，即

$$u_s = -\psi_{,n} = u_0$$

流入口處單位時間的流入量 Q 已知時，因



載滿珠寶的駱駝



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈

$$Q = \int_{s_1}^{s_2} u_n ds = \int \psi_{,s} ds = [\psi]_{s_1}^{s_2} = \psi(s_2) - \psi(s_1)$$

故 $\psi(s_2)$ 或 $\psi(s_1)$ 已知時，流速可由流函數的傾度求得。當流速分佈 u_n 已知時因

$$\int_{s_1}^s \psi_{,s} ds = \int_{s_1}^s u_n(\xi) d\xi$$

已知任意位置的流函數時，可從下式計算

$$\psi(s) - \psi(s_1) = \int_{s_1}^s u_n(\xi) d\xi$$

2.3 渦度相關之邊界條件

將邊界上的渦度以法線及切線方向表示如下

$$\omega_B = -\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} \quad \text{2011 埃及尼羅河之旅}$$

① 邊界為固定壁時法線方向成份為 0，得

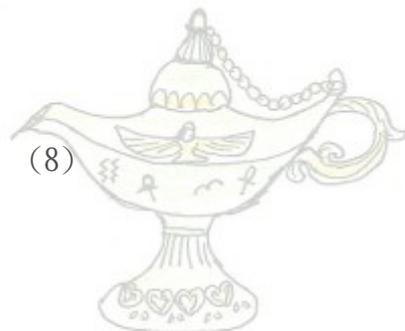
$$\omega_B = -\frac{\partial u_s}{\partial n}$$

代入(7)式得

$$\omega_B = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}$$

② 邊界為固定壁，切法線方向成份為 0 時

$$u_s = -\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$



阿拉丁神燈 (9)

沿法線從邊界取 Δn 距離，作為內點與外點，將(8)及(9)式差分得

$$\omega_B = -\frac{\psi_{IN} - 2\psi_B + \psi_{OUT}}{\Delta n^2} \quad (10)$$

$$\frac{\psi_{OUT} - \psi_{IN}}{2\Delta n} = 0$$

下標 IN、B、OUT 分別表示內點、邊界點與外點。消去外點得

$$\omega_B = -\frac{2\psi_{IN} - 2\psi_B}{\Delta n^2}$$

- ③ 對孔蝕，流速有下列限制

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -u_s$$

差分得

$$\frac{\psi_{OUT} - \psi_{IN}}{2\Delta n} = -u_s \quad \text{2011 埃及尼羅河之旅}$$

將上式的 ψ_{OUT} 代入(10)式得

$$\omega_B = -\frac{2\psi_{IN} - 2\psi_B}{\Delta n^2} + \frac{\partial u_s}{\partial n}$$

- ④ 邊界為自由水面時，依(8)式，不考慮表面與近傍的流速差，得

$$\omega_B = 0$$

- ⑤ 流出口處其法線方向流速一定時，沿邊界渦度的傾度為 0，即

$$\frac{\partial \omega_B}{\partial n} = 0$$

載滿貨品的驢子

載滿珠寶的駱駝

阿拉丁神燈

回應用邊界元素法解析海洋擴散