移流擴散方程式

濃度為 C 的介質在流體中擴散時，對流體某固定領域Ω內，介質質量可以下式表示

$$\int_{\Omega} C d\Omega$$

將其對時間微分得

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega$$

上式表示領域Ω內可溶解質量的變化率，而從邊界流入溶解質的流入率為依移流及因擴散積分引起兩者之和，即

$$-\int \left[vC - k\frac{\partial C}{\partial n} \right] d\Gamma$$

但 k 為擴散率，依可溶解質量的守恆法則得

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega = -\int \left[vC - k\frac{\partial C}{\partial n} \right] d\Gamma$$

利用發散定理將上式右邊的邊界積分轉換成領域積分，可得下列移流擴散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial v_1 C}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2 C}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial C}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial C}{\partial x_2} \right) = 0$$

若擴散率 k 為一定，且因連續方程式成立，可得下列擴散方程式。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_1\frac{\partial C}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial C}{\partial x_2} - k\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^{\,2}} \right) = 0$$

對時間參數以下式無因次化

$$\tau = t\frac{U}{L}$$

L、U 分別為特定長度及流速。

當濃度的上、下限分別為 C_1 、 C_0 時，無因次化濃度可以下式

$$\theta = \frac{C - C_0}{C_1 - C_0}$$

則無因次移流擴散方程式為

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + u_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial\theta}{\partial x_2} - \frac{1}{Pe}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2{}^2}\right) = 0$$

但 Pe 為下式所示之 Pĕclet 數

$$Pe = \frac{LU}{k}$$

回應用邊界元素法解析海洋擴散

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈