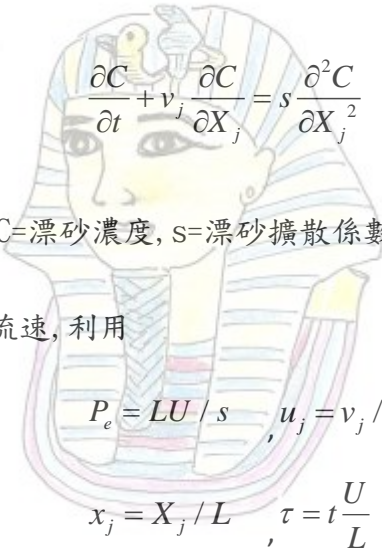


### 3 維漂砂移動方程式邊界積分方程式

2012. 02. 03

#### 1 非定常漂砂移動方程式



(1)

但  $C$ =漂砂濃度,  $s$ =漂砂擴散係數(尚未定義),  $v_i$  為流速分量, 利用  $L$ =代表長,  $U$ =基準流速, 利用

載滿珠寶的駱駝

$$\theta = (C - C_{\min}) / (C_{\max} - C_{\min})$$

2011 埃及尼羅河之旅

, 將上無成因次化得

$$P_e \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} = 0 \quad (2)$$

#### 2. 非定常漂砂移動方程式含時間項基本解的的邊界積分方程式

將(2)式乘以權重函數  $w$  並對全部領域  $\Omega$  及時間間隔  $\tau_1 \leq t < \tau_2$  積分而得

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[ P_e \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau = 0 \quad (3)$$

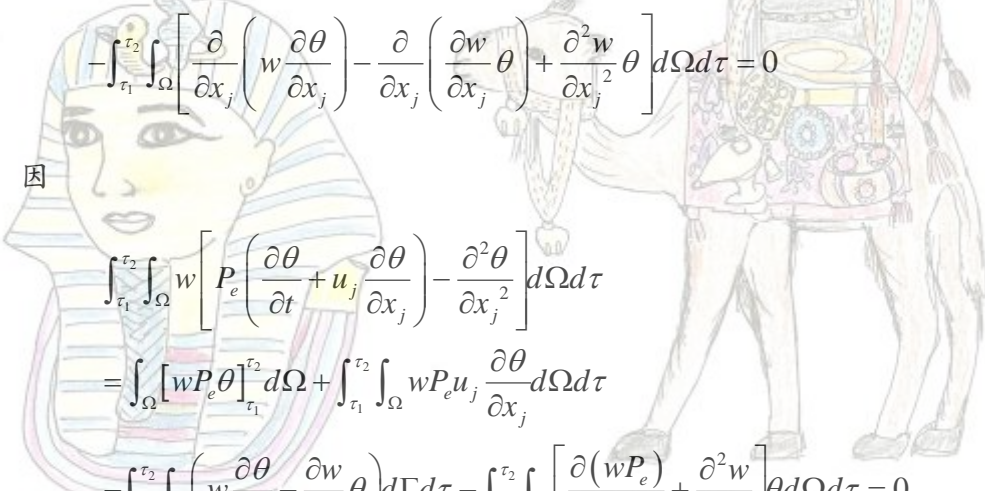
載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

對上式中的時間微分項及擴散項作部份積分得

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[ P_e \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial (w P_e \theta)}{\partial \tau} - \frac{\partial (w P_e)}{\partial \tau} \theta \right] d\Omega d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega d\tau \quad (4)$$

因

$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( w \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial w}{\partial x_j} \theta \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \theta \right] d\Omega d\tau = 0$$


$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w \left[ P_e \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} \right] d\Omega d\tau = \int_{\Omega} [w P_e \theta]_{\tau_1}^{\tau_2} d\Omega + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} w P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega d\tau \quad (5)$$

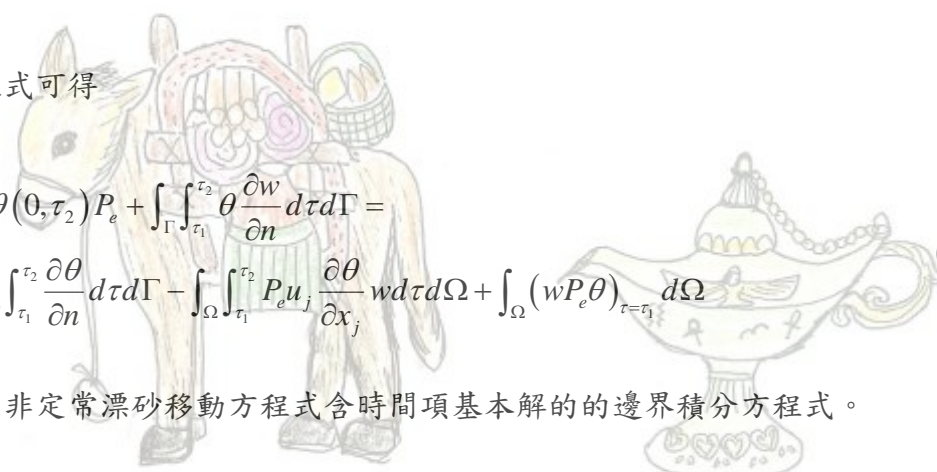
$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Gamma} \left( w \frac{\partial \theta}{\partial n} - \frac{\partial w}{\partial n} \theta \right) d\Gamma d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial (w P_e)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right] \theta d\Omega d\tau = 0$$

當加權函數  $w$  採用下式所示函數時

2011 埃及尼羅河之旅

$$w = \frac{P_e}{4\pi(\tau_2 - \tau)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{P_e r^2}{4(\tau_2 - \tau)} \right] \quad (6)$$

代入上式可得



$$c\theta(0, \tau_2) P_e + \int_{\Gamma} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta \frac{\partial w}{\partial n} d\tau d\Gamma = \int_{\Gamma} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial \theta}{\partial n} d\tau d\Gamma - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} P_e u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} w d\tau d\Omega + \int_{\Omega} (w P_e \theta)_{\tau=\tau_1} d\Omega \quad (7)$$

上式為非定常漂砂移動方程式含時間項基本解的的邊界積分方程式。

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

### 3. 非定常漂砂移動方程式的時間差分邊界積分方程式

將(2)式的時間微分項以 1 階差分近似, 時間增分為  $\Delta \tau$ ,

$$\tau_m = \tau_{m-1} + \Delta \tau \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

在時刻  $\tau = \tau_m$  時, (2) 式可變形成

$$P_e \left( \frac{\theta^m - \theta^{m-1}}{\Delta\tau} + u_j^m \frac{\partial \theta^m}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \theta^m}{\partial x_j^2} \quad (8)$$

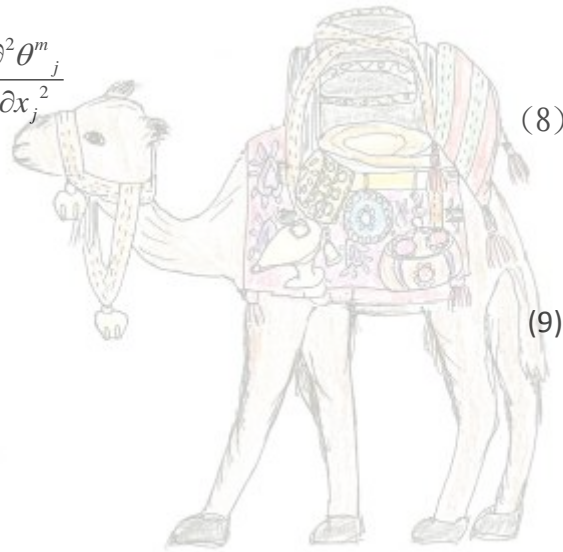
將上式改寫成

$$\theta^m - \lambda \frac{\partial^2 \theta^m}{\partial x_j^2} - S^m = 0$$

但

$$S^m = \theta^{m-1} - \Delta\tau u_j^m \frac{\partial \theta^{m-1}}{\partial x_j}$$

$$\lambda = \frac{\Delta\tau}{P_e}$$



載滿珠寶的駱駝

若(9)式的基本解以下式表示 2011 埃及尼羅河之旅

$$w = \frac{1}{4\pi\lambda r} \exp(R) \quad (10)$$

$$R = \frac{r}{\sqrt{\lambda}}$$

得下列非定常漂砂移動方程式的時間差分邊界積分方程式。

$$c\theta^m(P) + \int \lambda \theta^m \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int \lambda w \frac{\partial \theta^m}{\partial n} d\Gamma + \int S^m w d\Omega \quad (11)$$

參考文獻

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

1. 田中正隆、松本敏郎、中村正行:境界要素法,培風館,1991。
2. 境界要素法研究会:境界要素法の理論と応用,コロナ社、1986。
3. 日本流体力学会:流体における波動,朝倉書店,1989。
4. 登坂宣好、中山司:境界要素法の基礎,日本技連,1987
5. 黒木健実、竹迫一雄、添田朋子、大崎真喜子:境界要素流れ解析,森北出

版, 1987。

6. 日本機械学会: 流れの数値シミュレーション・コロナ社, 1990。
7. 日本土木学会: 海岸波動, 1994。
8. 保原充、大宮司久明: 数値流体力学, 東京大学出版会, 1994。
9. 本間仁、堀川清司: 海岸環境工学, 東京大学出版会, 1985。



載滿珠寶的駱駝

### 2011 埃及尼羅河之旅



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈